欧姆社学习漫画

漫画微积分

〔日〕小岛宽之/著
〔日〕十神　真/漫画绘制
〔日〕株式会社BECOM/漫画制作
张仲桓/译

あさがけ新聞社



科学出版社
www.sciencep.com

KindleDX出版署

✿前　言✿

——正因为是漫画所以可以轻松理解——

此刻，翻开这本书的您，我想一定属于下列中的两种类型之一。第一类，十足的漫画迷。这类读者一定会想“通过漫画来学习微积分会是一种什么样的感觉呢，真令人期待”。如果我们说的正是您，那就请您赶紧去付款吧！这本书绝对不会令您失望。作为一本“漫画书”来讲，这本书是十分有趣的。它是由当红漫画家十神真作画，并且由专业的漫画制作公司Becom为其编写的剧本。另外，本书还曾被漫画杂志刊载，其品质毋庸置疑。如果您曾经跟着《美味大挑战》学做菜、在《棋魂》中迷上过围棋、在《危险调查员》中对考古学萌发了兴趣的话，那么您一定也会因这本书而喜欢上微积分的。

“话虽如此，但是一本漫画数学书又能有趣到哪里去呢？”或许您会心存这样的疑虑。没错，实际上，最初从欧姆社的编辑那里听到关于这本书的构想时，我婉言谢绝了。想想市面上的那些“漫画××学”虽有漫画之名，实际上要么就只是塞满了插图，要么就只是将图画得很大，多为徒有其名、令人失望的东西。但是，看过样书（欧姆社的《漫画统计学》）之后，我的想法便发生了转变。该书同之前所说的那些书有所不同，因为它即使仅作为漫画来读也是非常有趣的。它并不单单只是通过插图来进行说明，它还是一部叙事性漫画书。编辑说我们的这本书也同样走叙事性漫画的路线，既然如此，我也就决定答应下来了。实际上，本人很早之前就有“用漫画的方式进行教学”的想法，而现在正好是一个进行尝试的好机会。正因为这样，我们保证您越是对漫画有所挑剔，这本书就越会令您享乐其中。

另外一类会翻看本书的人的想法可能是“对微积分感到头痛，甚至恐惧，不过或许漫画可以解决这一问题”。如果您属于这类人的话，那么现在我要说：“没错，您的直觉是对的，您是一个非常幸运的人。”这本书正是一本为那些对微积分无从下手的人配备了各种训练方法的书。总之，且不说这本书是“通过漫画进行讲解”的，单就微积分的“教学方法本身”而言，也是同以往的书籍有着本质差异的。

首先，本书提出了“微积分的实际用途是什么？”这一问题。但这个问题若只局限于“极限”（数列极限ε-σ理论）的教学方法的话是很难搞清楚的。如果不能清楚地知道微积分是用来做什么的，也就不能很好地理解微积分，仅仅使用它，是远远不够的。最后只会落得个“靠死记硬背过关”的无奈结果。本书在谈论“极限”问题时，便仅限于极限，而所有公式都以“一次近似”作为基本思路。您一定会觉得这些“公式的含义”很容易理解，并且完全能够将它们图像化。而且，这个教学方针的改变，使得从

微分到积分的学习变得更为顺畅，并且能够以最短的时间完成这一过程。再进一步讲，就是像三角函数、指数函数的微积分这部分，以前，总是听得糊里糊涂，感觉很困难，但现在它也被作者原创的方法攻克了，这些方法在一般的教科书上是没有的。此外，这本书甚至连泰勒级数展开和偏微分都讲到了，同以往已出版的漫画刊物相比内容更为丰富，这也正是本人的得意之处。最后，作为补充，微积分也会在其应用时的老搭档——物理学、统计学和经济学三个领域中出现，本书给出了很多“特别适合用微积分”的学习材料。由于以上种种，微积分对您来说已经完全不再是痛苦的事情了，您应该会觉得它是一件便利的工具吧。

请原谅我的固执与唠叨，我还是认为以上所说的这些效果“正因为是漫画才可能做到”。请您仔细想想看，为何读一本漫画所获得的信息量会比读一本小说得到的还要多。其原因是，漫画是可视化的数据，进一步说就是“动画”。而对于微积分来说，它本身就是“记述动态现象”的数学。因此，使用漫画进行教学的确是一个非常恰当的选题。

那么，就请您翻开本书去体会漫画和数学之间的绝妙组合吧！

小岛宽之

✿目　录✿

附　录 223

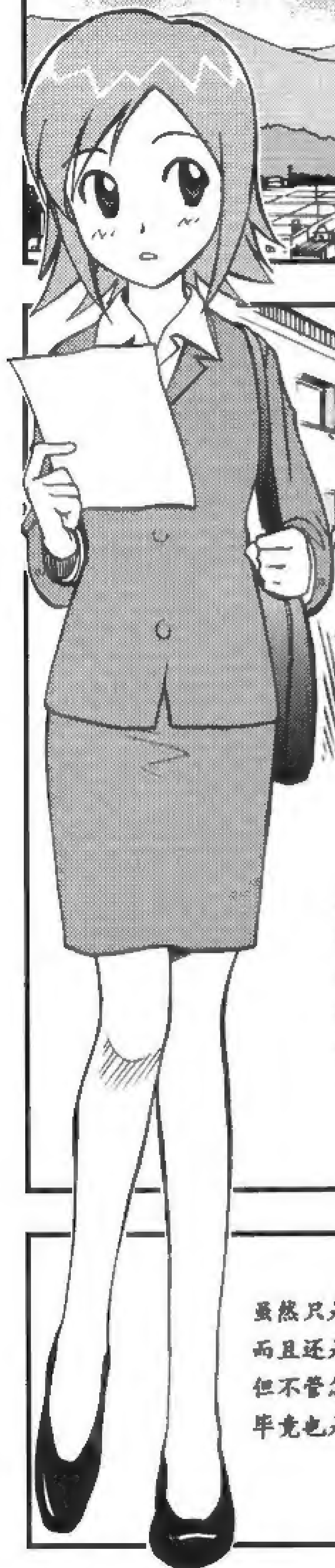
本故事纯属虚构。与真实的人物、机构名称无任何关系。
此外，书中的图和表是为了便于理解本书的内容，同实际的数值也有所差异。

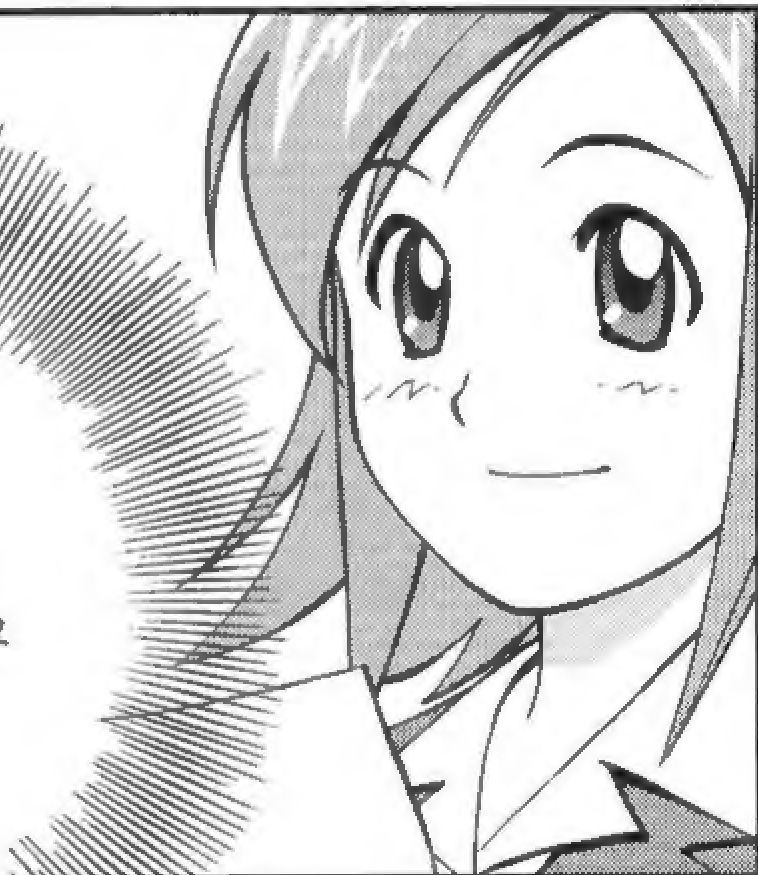
序　章

函数是什么








晨访报社
算田镇分社
应该在这附近啊，
可是……
晨访报社
算田镇分社
我……引间典子的
记者生涯就要从这里
开始啦！

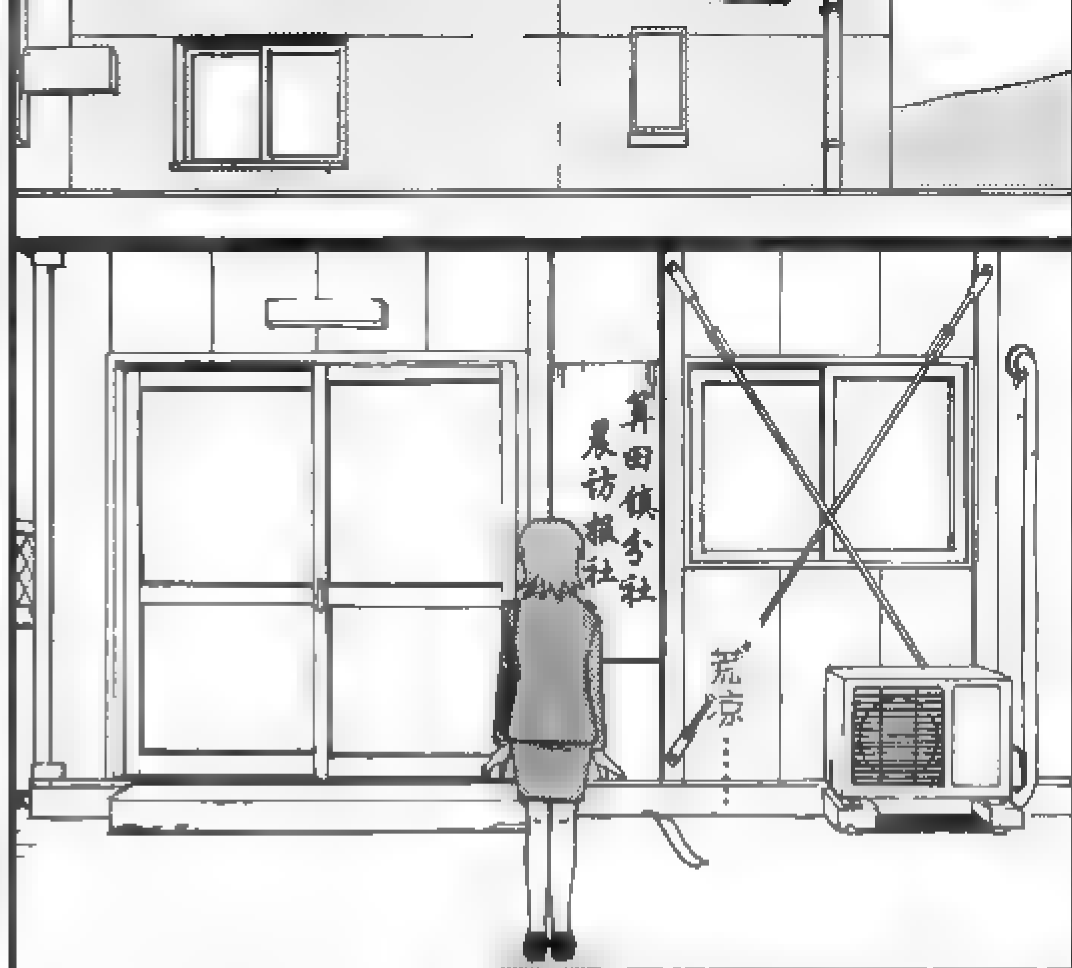

虽然只是地方性报纸，
而且还是个分社，
但不管怎么说，
毕竟也是一名记者呀。
我一定会努力的!!


晨访报社
算田镇
营业部


这里就是……
报社……
吗？
算田镇分社……
怎么和地图
上标的不一样啊？
晨访
报社

在旁边。

是找算田镇分社吧？
那你完全弄错了。
这里是销售部，
所以大一些。
晨访
报社



算田镇分社
晨访报社





虽然是分社，但这里也是名副其实的晨访报社。

不行……
不可以气馁啊，乘子！
分社嘛，也是没有办法的啊。

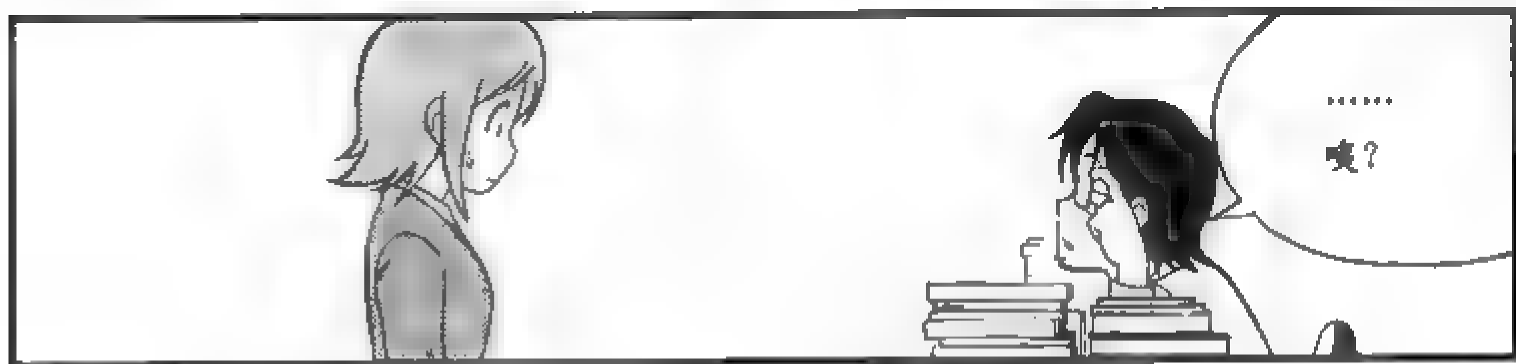


呼呼——






要是送外卖，
就放这里……


……
咦？


你是今天来
报到的新人吗？


你好！
我是引间乘子。
对不起，
刚刚误会了。
我是分社社长，
我姓关。


那边的大块头是
曾井先生，
我唯一的部下。
只有两个人
啊……

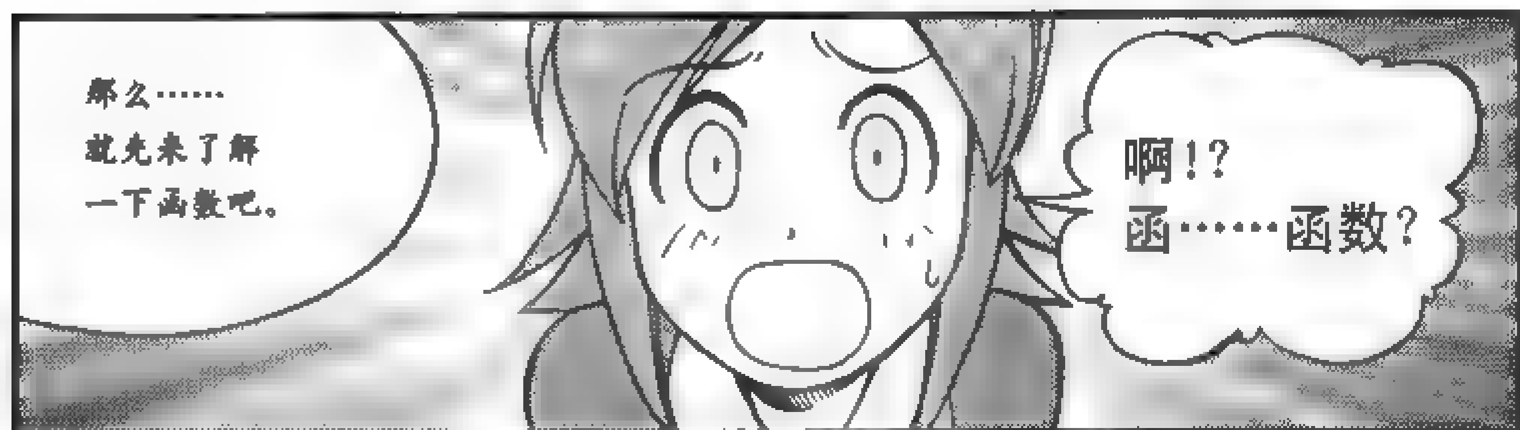

这里可是个好地方啊！
有适合思考问题
的理想环境。


没错！
对事实的
思考。
思考……


某个事实和其他事实
存在着一定的联系。
不了解这个的话，
就不能做出
真实的报道。


真实的
报道！！

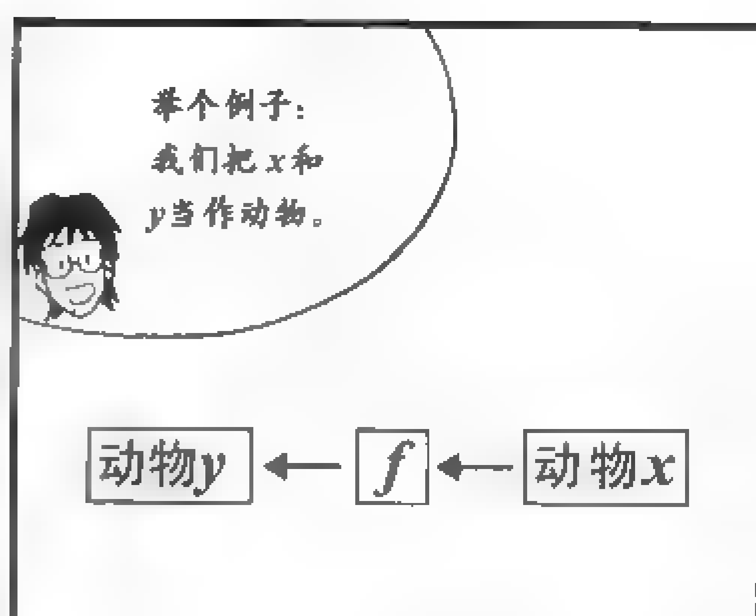

嗯，
引间小姐
是文科生吧？
是的！
从高二开始
就一直学文科了。

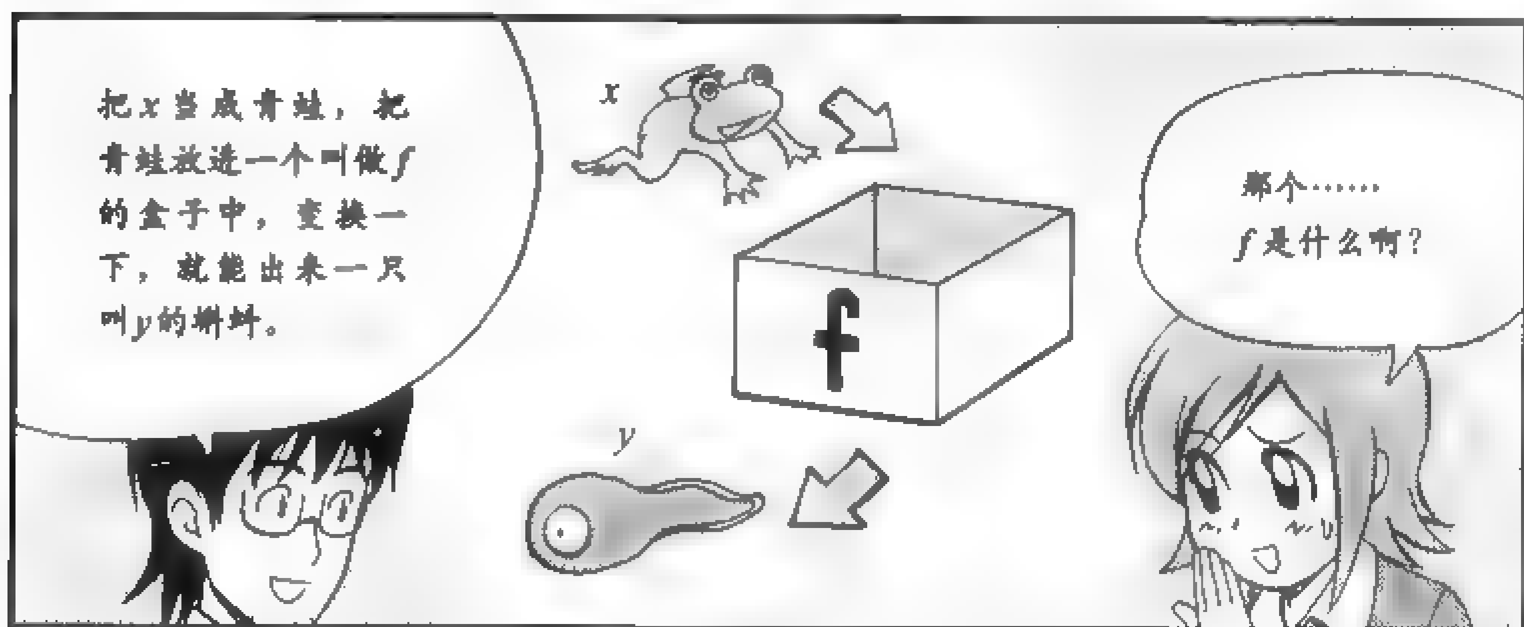

那么……
就先来了解
一下函数吧。
啊!?
函……函数？

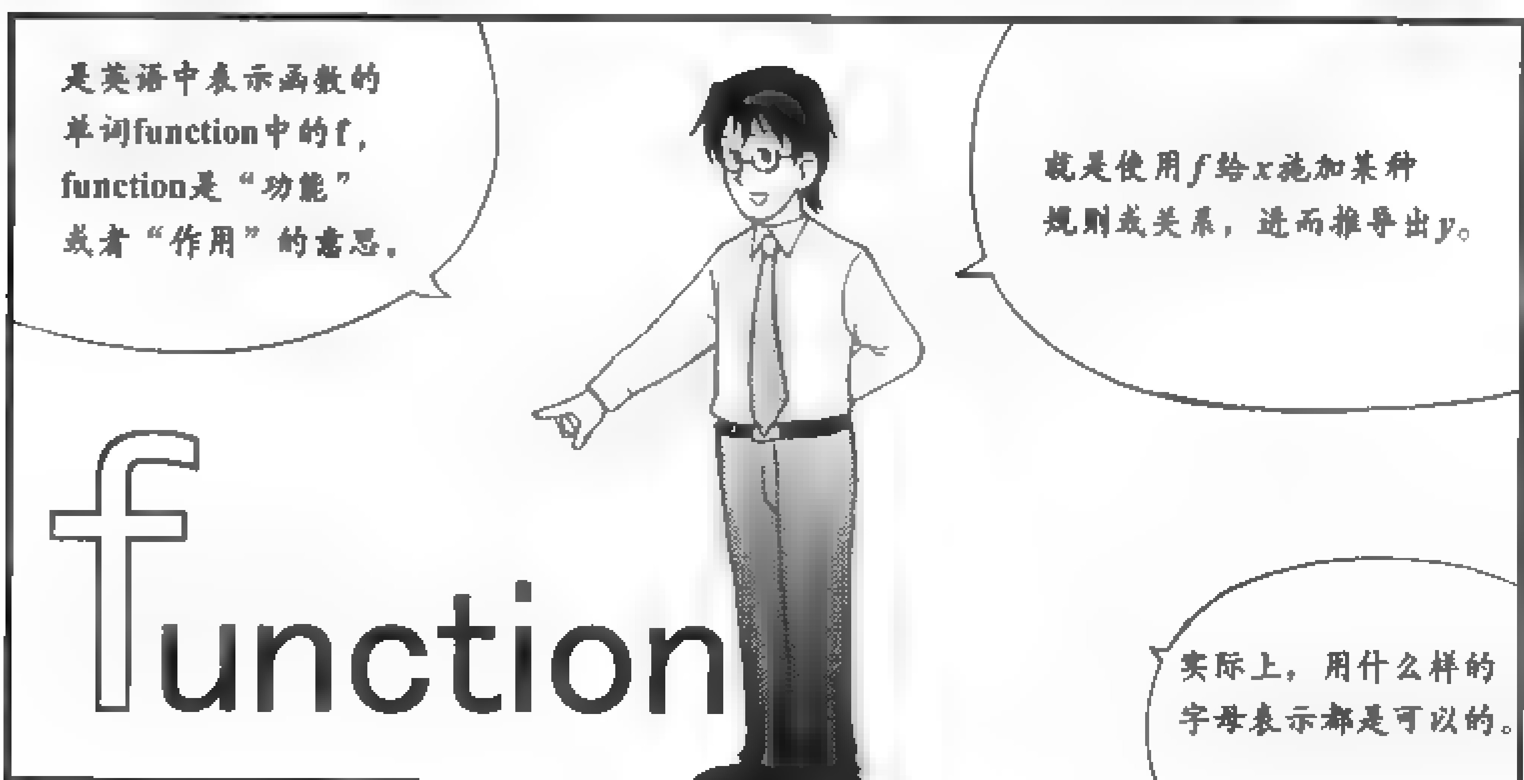

一件事变成了这样，使得另一件事变成了那样。所谓函数，说的就是事物间的相关性。
世事本身就是一个函数！

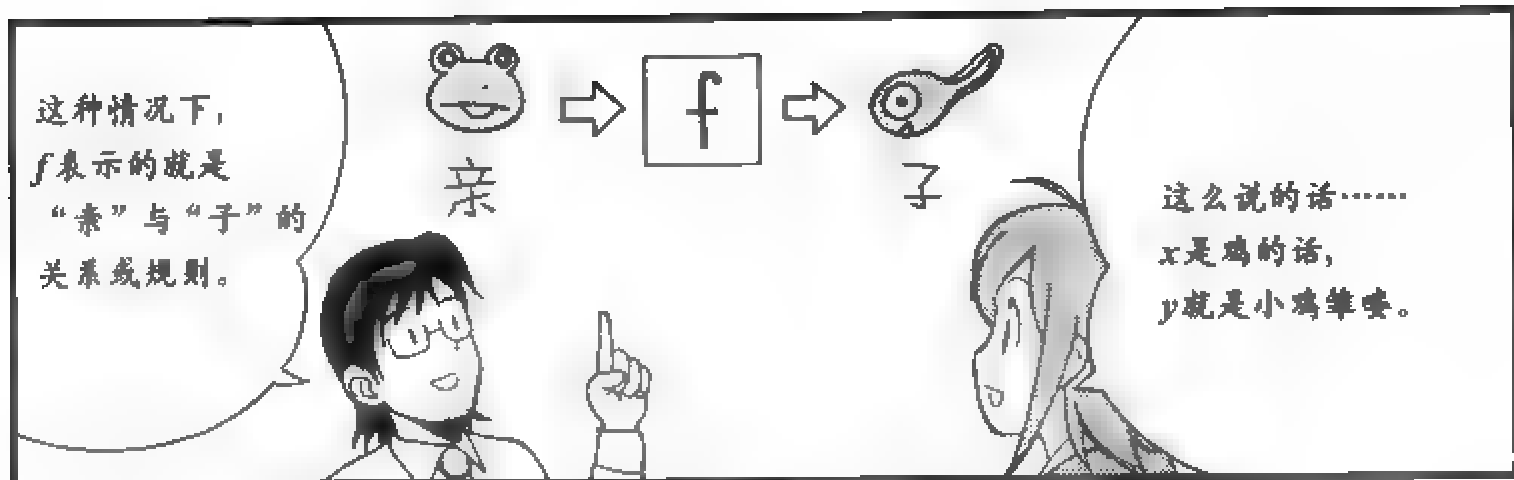

函数说到底就是用来描述“关系”（或“因果”）“变化”或者“单位变化”的工具。
说到“因果”，
从结果探究原因
不正是记者精神
的所在吗？
什么啊
……


函数经常用
式子$y=f(x)$
进行表示，
你知道吗？
不知道!!


举个例子：
我们把x和
y当作动物。
动物y ← f ← 动物x


把x当成青蛙，把
青蛙放进一个叫做f
的盒子中，变换一
下，就能出来一只
叫y的蝌蚪。
x
f
y
那个……
f是什么啊？


是英语中表示函数的
单词function中的f，
function是“功能”
或者“作用”的意思。
就是使用f给x施加某种
规则或关系，进而推导出y。
function
实际上，用什么样的
字母表示都是可以的。


这种情况下，
*f*表示的就是
“亲”与“子”的
关系或规则。
亲
f
子
这么说的话……
*x*是鸡的话，
*y*就是小鸡喽。


OK！
再来仔细地
看一下这个！


重新制定工资
所得税的迹象
例如，收入和消费
之间的关系，也能
够看作函数。
啊——
奖金增加的话，
商场的营业额
也会上涨。


9.6马赫　吉尼斯
超音速飞机　X43A
声速和气温也可以
用函数表示，每上
升1℃，速度就会
提高0.6m/s。
山的高度和气温
也一样，每上升
100m，温度就会
下降约0.5℃。
呀——
啊

怎么样？
我们的生活中
到处都有函数吧？

在这有时间，
这样的问题可以
慢慢考虑。

确实啊！

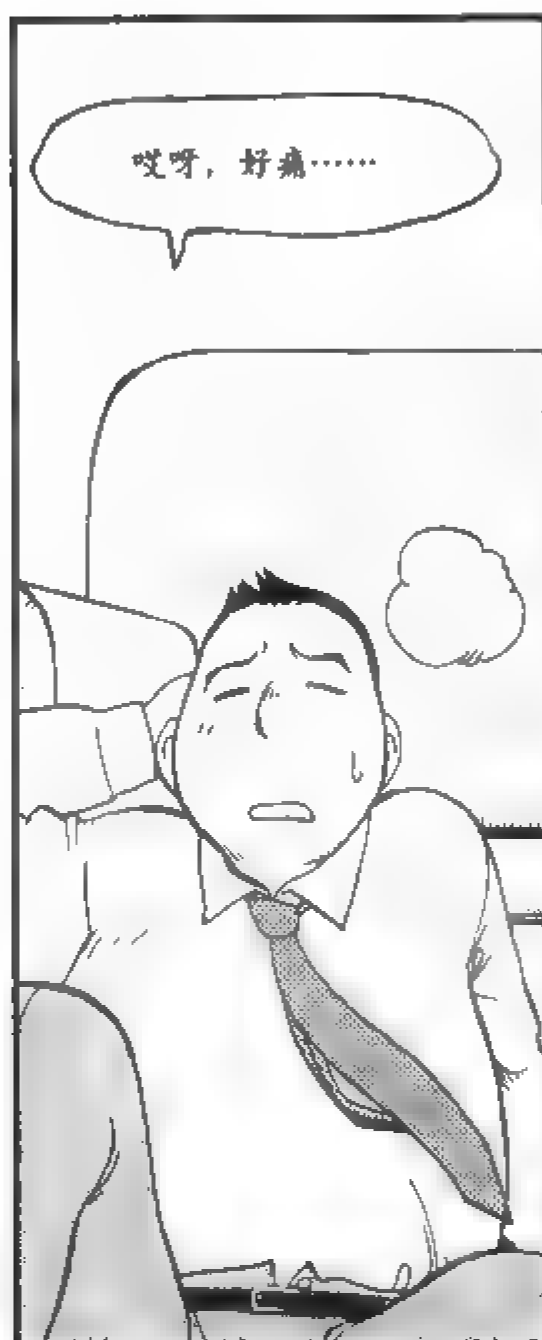
在这里[illegible]考的问[illegible]，
说不定什么时候就会用到了。

虽然这里是分社，
但还请你
多多努力啊！

是……
是的!!

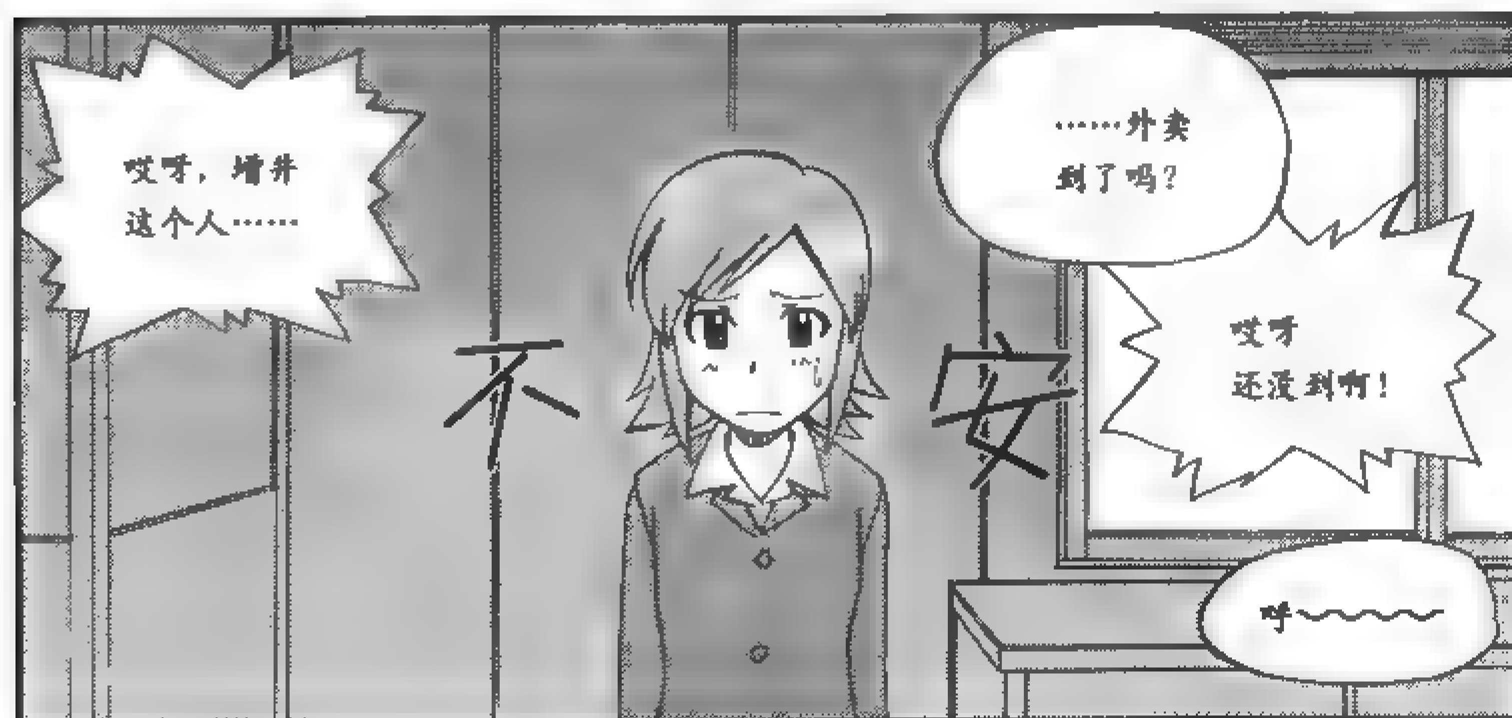
咚

哇啊！


哎呀，好痛……


那个……
送外卖的人已经来了啊！我的鸡肉加蛋盖饭在哪儿？
您还好吧？


还没到啊……那外卖到了之后
再叫我起来吧……
呼~~~
翻身
增井先生，
外卖还没到。
这个人是……

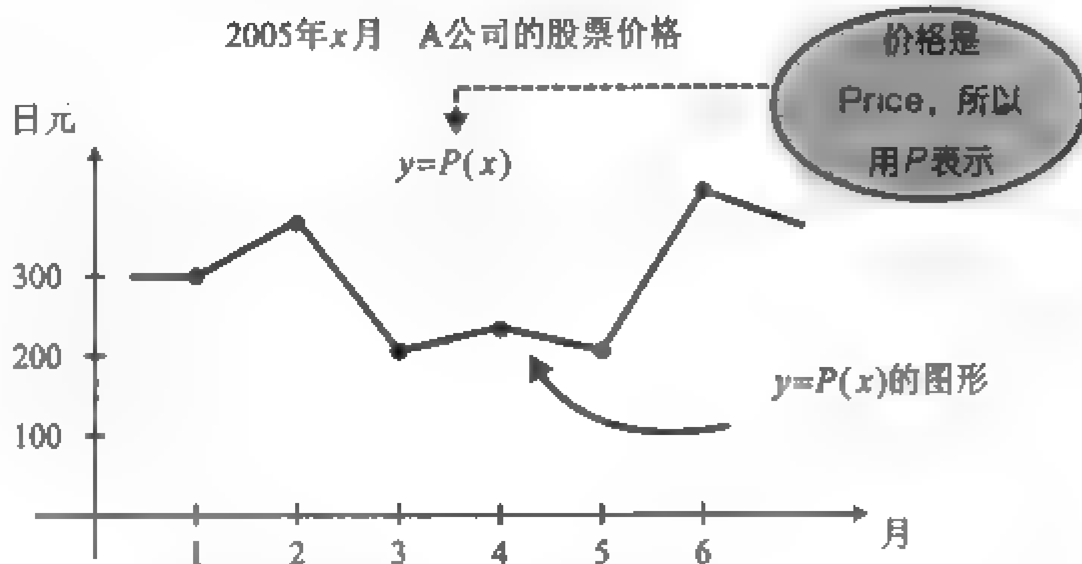

……外卖
到了吗？
哎呀
还没到啊！
呼~~~~
不安
哎呀，增井
这个人……

■ 表1　函数的特征

描述实例	计算式	图例
因果	温度为 x℃时，蟋蟀 1 分钟鸣叫的次数为 y(次/分)。 温度为 x℃时，蟋蟀 1 分钟鸣叫的次数 y(次/分)大约可以表示为 $y=g(x)=7x-30$ （这里我们使用 $g(x)$ 试试看） $x=30$℃　$7\times30-30$ 因此 1 分钟鸣叫 180 次	画成图形的话，就是一条直线（一次函数）。
变化	在温度为 x℃的空气中，声速 y(m/s)可表示为 $y=v(x)=0.6x+331$ 温度为 15℃时， $y=v(15)=0.6\times15+331=340$(m/s) 温度为 −5℃时， $y=v(-5)=0.6\times(-5)+331=328$(m/s)	
单位变换	将华氏温度 x(℉)变换为摄氏温度 y(℃) $y=f(x)=\frac{5}{9}(x-32)$ $x=50$℉　$\frac{5}{9}(50-32)\rightarrow10$℃	
	计算机采用经过二进制法(0，1)处理后的信息， x 比特所表示的信息量为 y，则 $y=b(x)=2^x$ （第4章第130页中所采用的）	画成图形的话，就是指数函数。

在画图时，也存在既不能用直线也不能用特定形状的曲线来表示的函数。





虽然不能用一个已知的式子表示$P(x)$，但它也是函数。
到了7月才能画出$y=P(6)$的图形。
要是在5月间就知道$y=P(6)$的话，那可就要发大财了！！

函数组合在一起之后称为“复合函数”。我们能够通过复合函数将因果关系扩展到更广阔的范围。



$x \rightarrow$ [f] $\rightarrow f(x) \rightarrow$ [g] $\rightarrow g(f(x))$ ← f 和 g 的复合函数。

序章　本章习题

1. 求出温度为华氏x下时，蟋蟀1分钟鸣叫的次数z次/分。

第1章
微分就是将函数化繁为简



1 近似函数的优点





引间小姐，隔壁街好像开了一家不错的意大利餐厅，我们去试试菜吧？

呵哈——意大利菜，我最喜欢啦！

啊？可是工作结束了……还没到中午啊！

这里是分社，经常是这个样子！

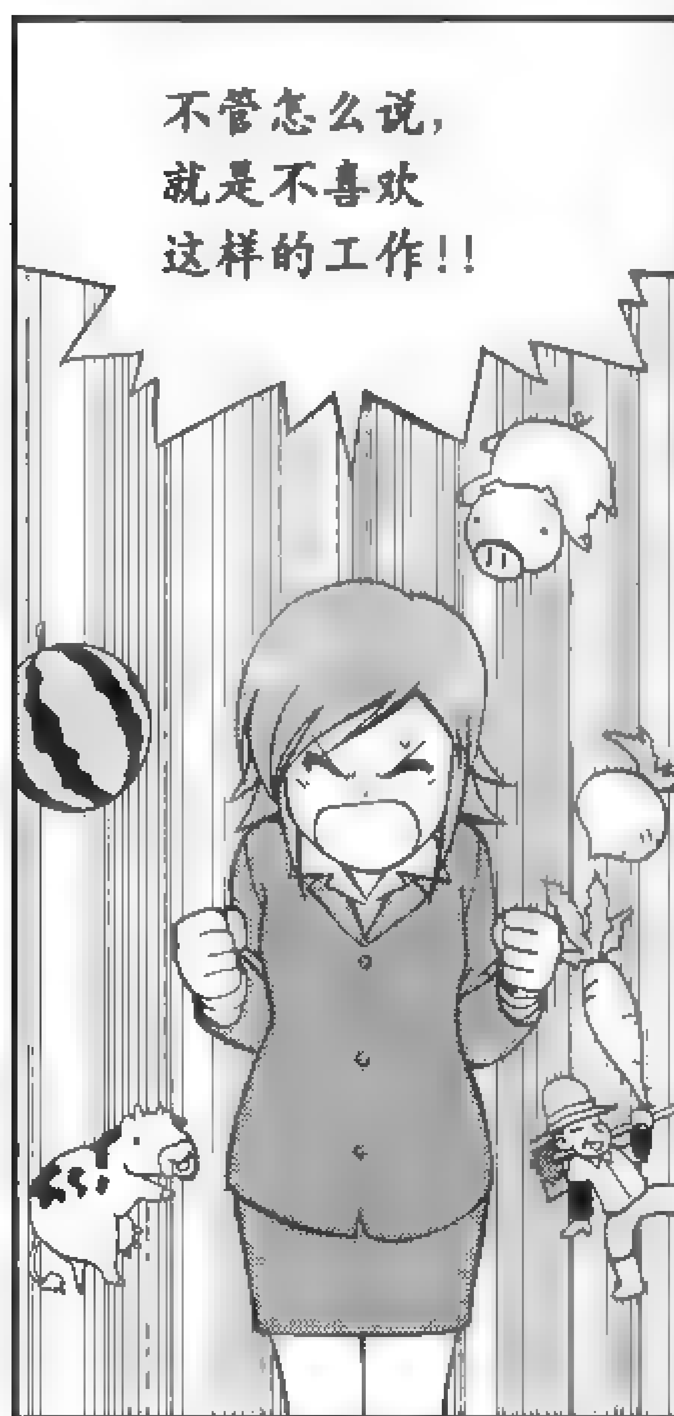

盯
看看

回复 全部回复 转发 打印 删除 上一封 下一封 通讯录
发信人：
日期： 年 月 日
地址：
主题：
居民区又一次有熊作乱……幸无人受伤
算田镇的西瓜参加县内评比
啊，每天都是发送这种报道吗？



虽然是很俗套的报道，但也不要舍弃啊！人生的微妙之处……
可是我想做的是政治、外交、世界经济……
这些实时动态报道！
啊——别做梦了！
备受打击


咔咔
首脑会谈哪会在我们这里举行啊？
在这里，时间都好像静止了。


不管怎么说，就是不喜欢这样的工作!!

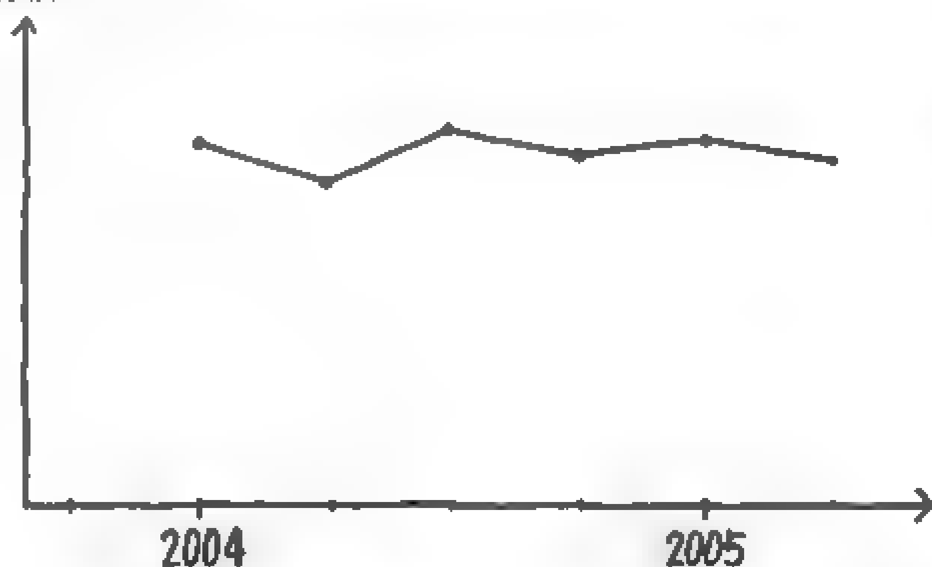

引间小姐，只要积极地做好这里的工作就可以了。


不知道引间小姐今后要在哪个领域发展呢？
我会让你得到充分地锻炼，达到在总社工作的水平。

对了，你认为以日本的经济形势来看 通货紧缩会持续吗？

依我看来，还是有通货紧缩的倾向，不过……

政府曾多次说过经济日渐复苏。



可是，在复苏先头出现之前，需要耗费相当长的时间。

首先，作为记者，最重要的是弄清你想知道的事情是什么。

隐约有种不祥的预感……

然后，在探求想知道的事情时，将其近似成便于理解的函数，那样事物就会呈现出来！

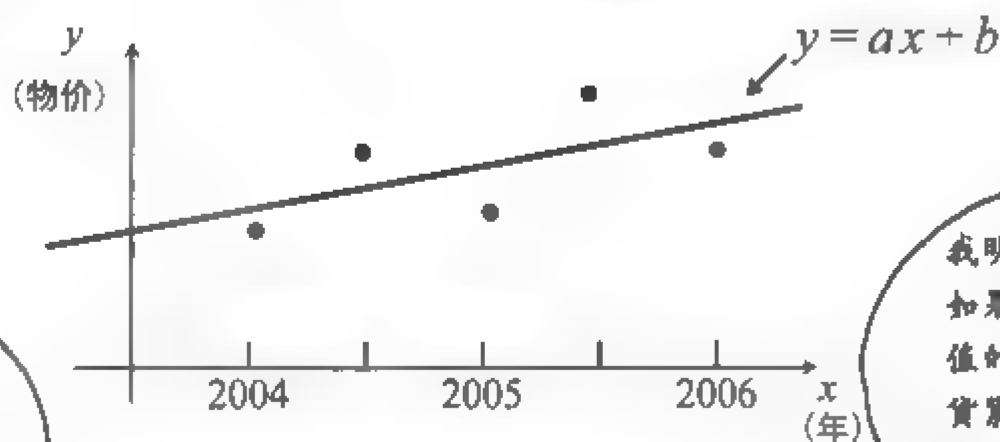
所谓一次函数就是 $y=ax+b$

又……又是函数。

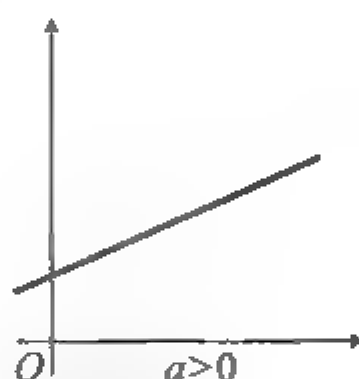
首先，这里最希望知道的是现在的物价是上涨了还是下降了？

瞧，

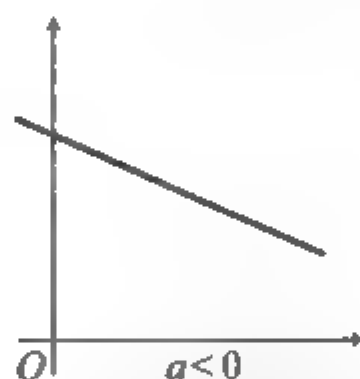
我们用 $y=ax+b$ 来试着近似一下……



我明白了！如果 a 是负值的话，通货紧缩就会持续下去。



变成通货膨胀



持续通货紧缩


嗯 理解力
还不错嘛……
咕

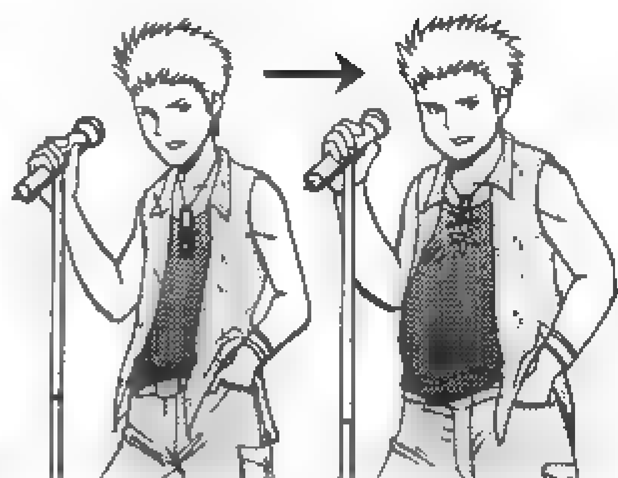



那么，
接下来的事
到了意大利餐厅
再说吧！


增井先生！
这里拜托你
了，少吃点零
食啊！


说到零食，
你知道那个
出了一本畅
销瘦身书的
男艺人K吗？
嗯！

可是现在
反弹啦！
又突然开始
变胖了。



经纪公司
已经提醒过
他本人了。

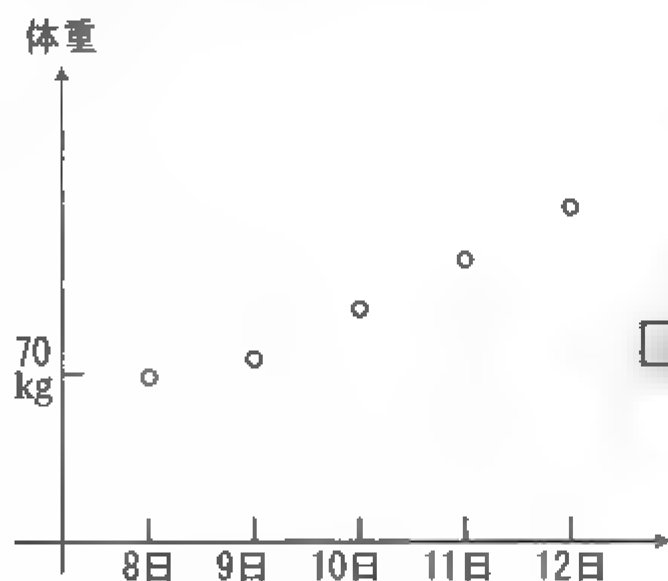
我已经过了
体重增加的
顶峰了。

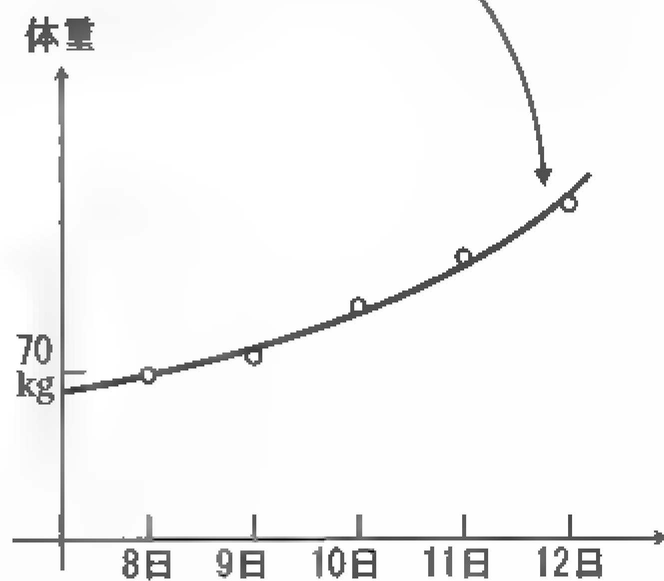
K如此回答。
那么，经纪公司
想知道什么呢？

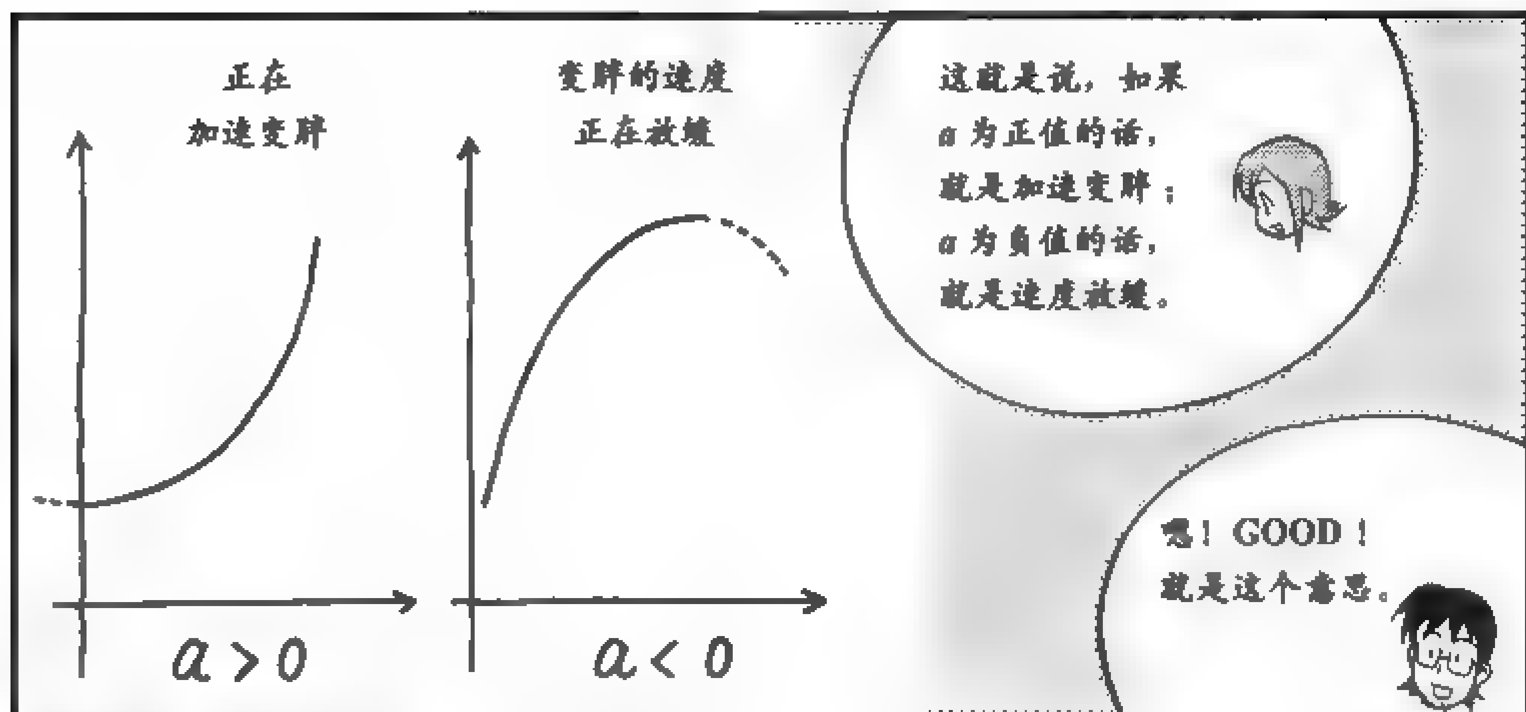
真像K所说
的那样，体重
的增加正在放
缓吗？

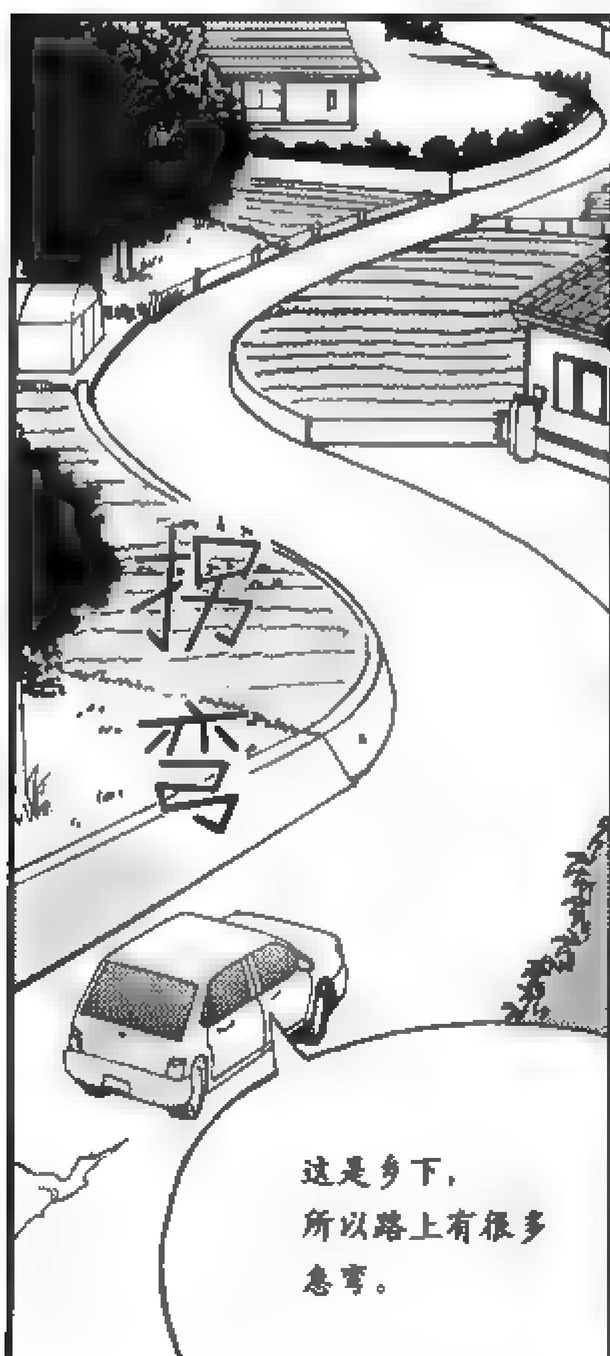
是这样的。
这种情况下
可以近似为
$y=ax^2+bx+c$

$$y=ax^2+bx+c$$






正在
加速变胖
变胖的速度
正在放缓
$a>0$
$a<0$
这就是说，如果
a为正值的话，
就是加速变胖；
a为负值的话，
就是速度放缓。
嗯！GOOD！
就是这个意思。


拐弯
这是乡下，
所以路上有很多
急弯。


对了，
想知道
这些弯路的
弯曲程度吗？
不是
很想知道。

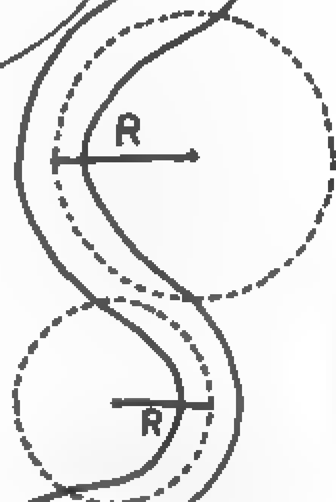

这样的话，
近似成圆
就可以了。
……



$y=\sqrt{R^2-(x-a)^2}+b$

$((x-a)^2+(y-b)^2=R^2)$

近似为以 (a,b) 为圆心，R 为半径的圆弧。



瞧，路上弯曲的地方可以暂时看成是半径为 R 的圆弧。

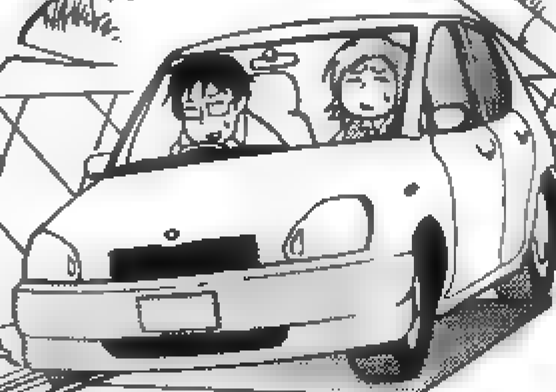




像这样，R 越小，路弯得越厉害……

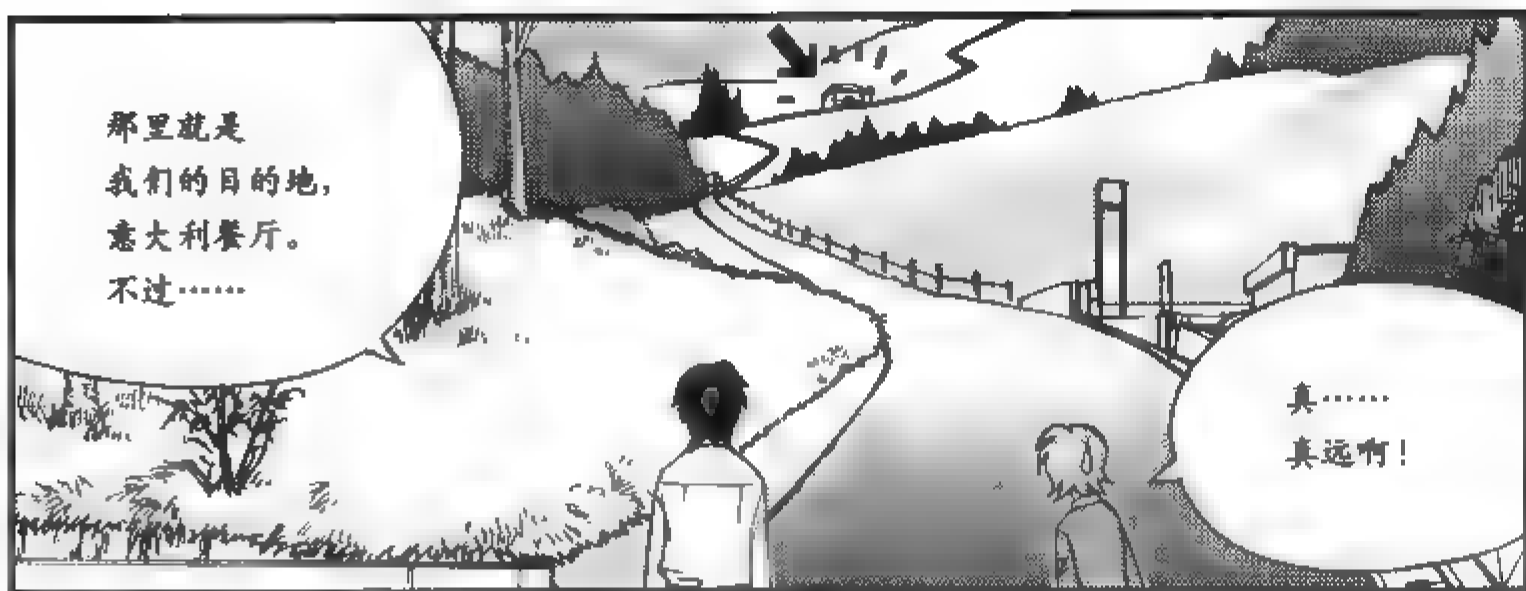
啊！危险！

咚咚



呃，你没事吧？

还好……



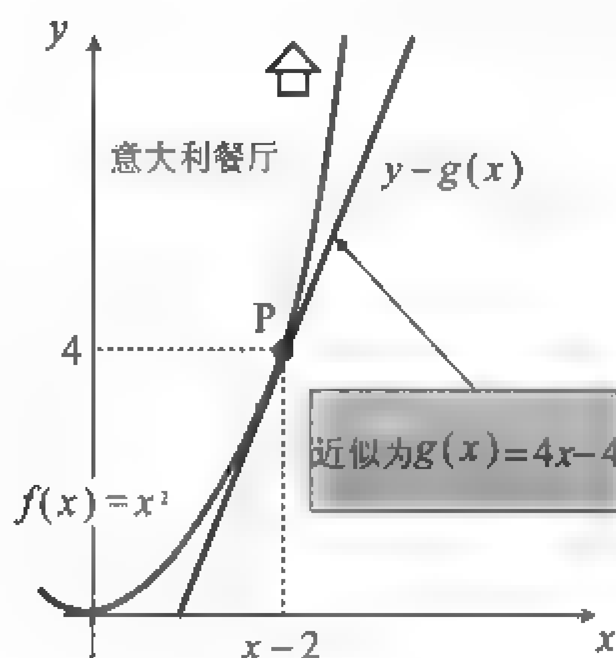


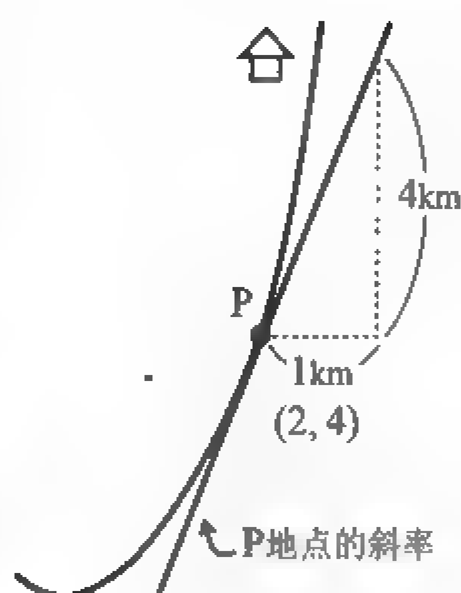


意利大餐厅

P 事故现场

然后
用一把大刀
将这条路切开。





将$y=x^2$在$x=2$处近似成一次函数，便有$y=g(x)=4x-4$[1]通过这个式子，就可以知道这山坡的斜度。

现在以P处为例，它就相当于水平方向上推进1km，高度就上升4km的坡（实际上并不是这么陡的坡）。

喂，增井先生吗？出了点麻烦，请您过来帮帮忙吧！

位置？位置就是P地点。

要是想知道分社社长的大脑中在想些什么，要怎样近似才好啊？

1. 原因见第29页。

2 要注意误差率

误差率的概念也很重要，所以在等候教授的期间先来讲讲它吧！

误差率？

所谓误差率就是以 x 为起点进行变化时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的值之间的差异，占 x 的变化量的百分比。也就是说——

$$误差率=\frac{(f和g的差异)}{(x的变化量)}$$

就是这样。

差异啊，

爱是什么就是什么吧……

还是想赶快去吃意大利餐……

啊，

找到例子啦！



把我们所在地点的 x 值看做是2，把到那边的拉面馆之间的距离看做是0.1。

y

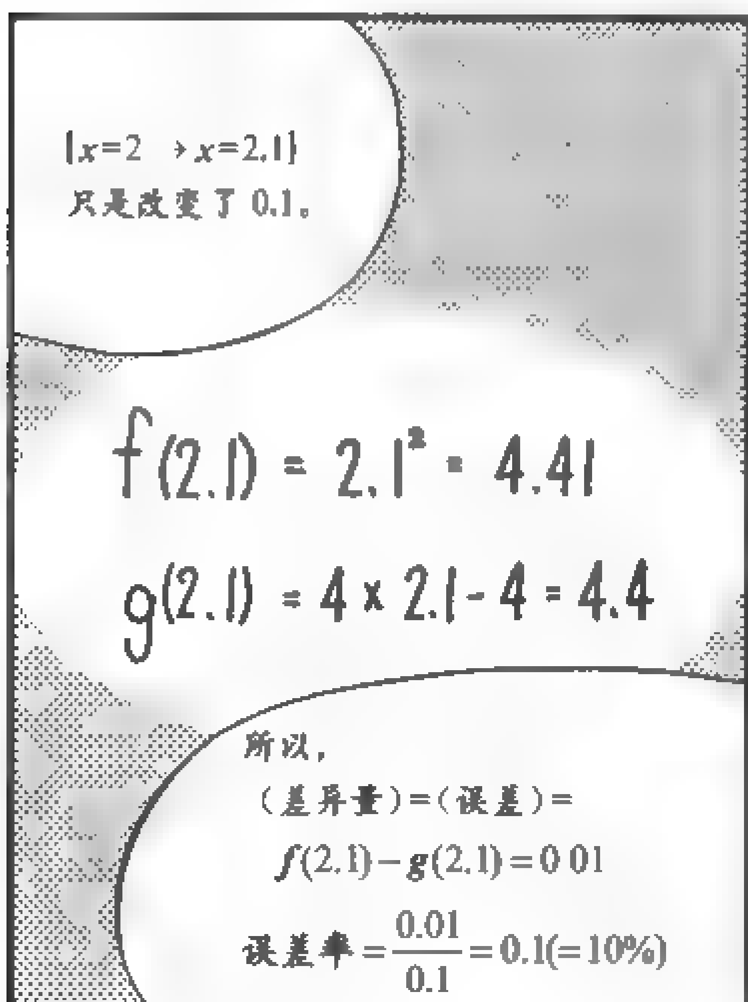
拉面

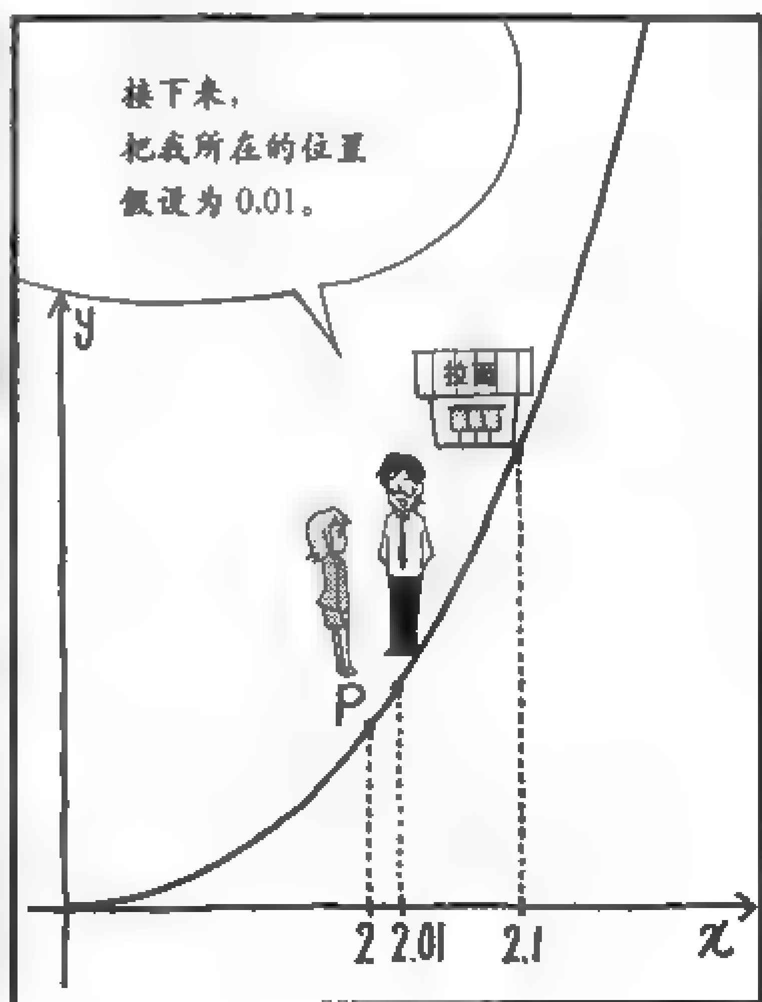
P

2

2.1

x





[$x=2 \rightarrow x=2.01$]
改变了 0.01。

误差 $f(2.01)-g(2.01)=4.0401-4.04=0.0001$

误差率

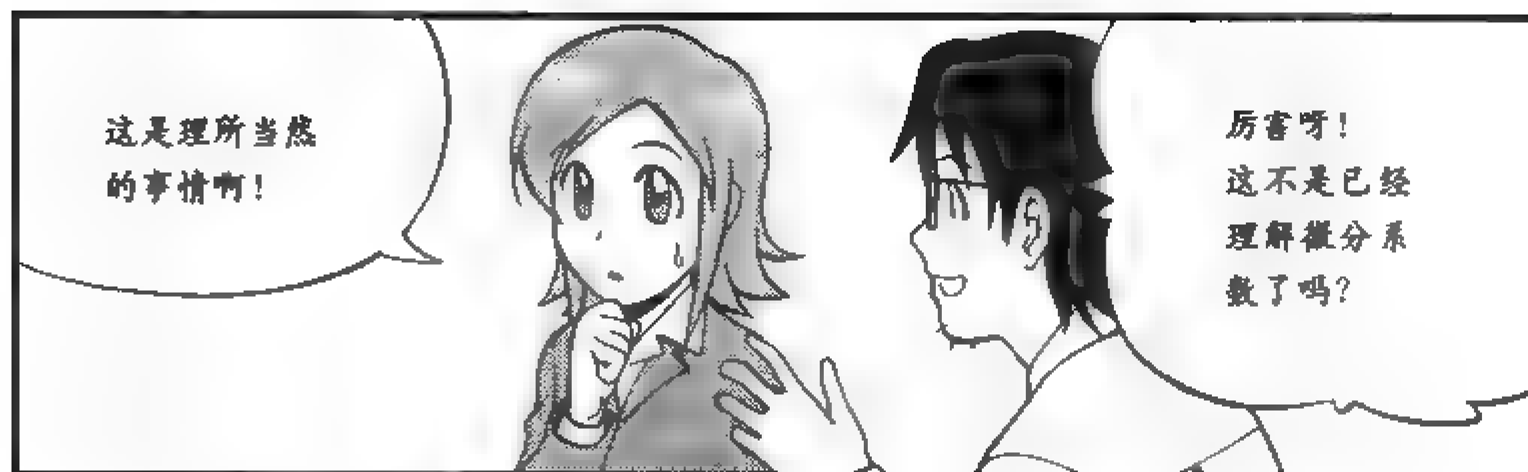
$$\frac{0.0001}{0.01}=0.01$$
$$=[1\%]$$

拉面馆
的误差率
变小了啊！



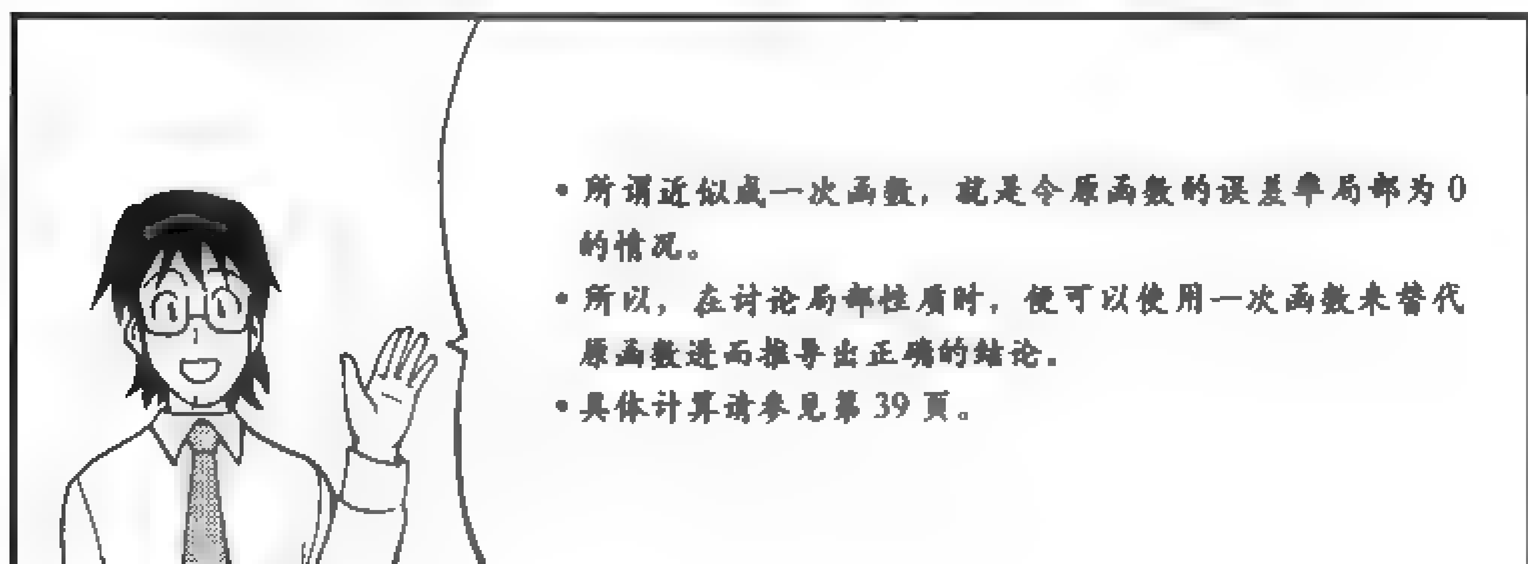
变化量 ⟶ 0　则　误差率 ⟶ 0

x距离2的变化量	$f(x)$	$g(x)$	误差	误差率
1	9	8	1	100%
0.1	4.41	4.4	0.01	10%
0.01	4.0401	4.04	0.0001	1%
0.001	4.004001	4.004	0.000001	0.1%
↓ 0				↓ 0


厉害呀！
这不是已经
理解微分系
数了吗？
这是理所当然
的事情啊！

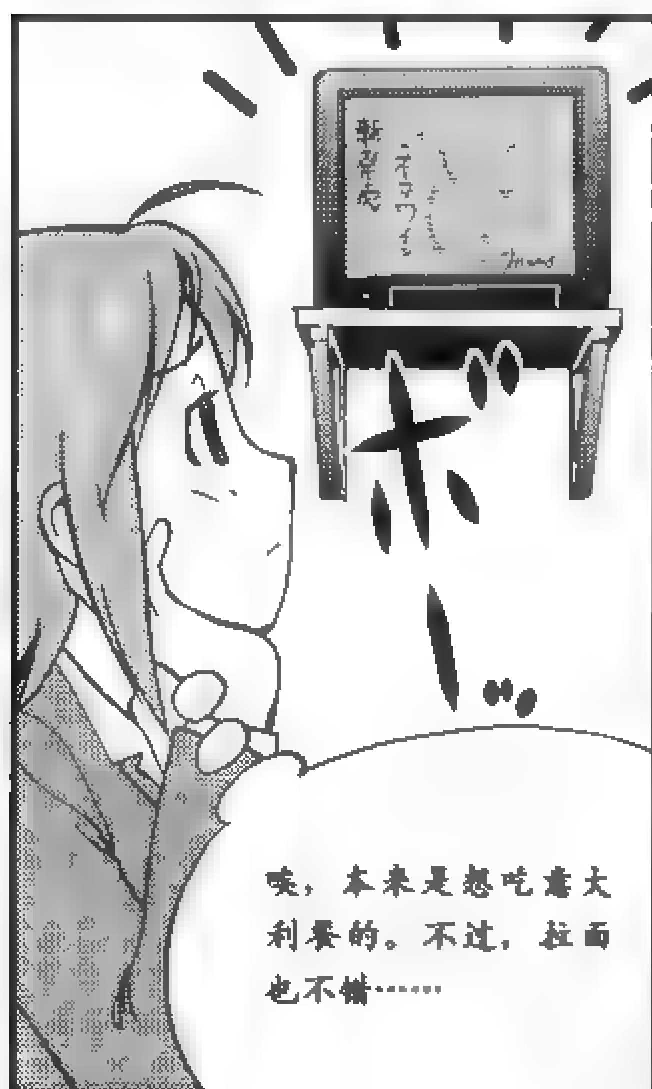

所以……
误差率最小
的店就是……
算田拉面
拉面馆
……


对啊，
今天的就餐地点
改在离P点较近
的拉面馆吧。
你就直说好了！
我们的午餐
改在拉面馆了!!


• 所谓近似成一次函数，就是令原函数的误差率局部为 0 的情况。
• 所以，在讨论局部性质时，便可以使用一次函数来替代原函数进而推导出正确的结论。
• 具体计算请参见第 39 页。


算田拉面
拉面
拉面


嘶
嘶
嘶
为什么来救援的
增井吃得最多呢……


唉，本来是想吃意大利餐的。不过，拉面也不错……


引间小姐，你无意间看到的电视广告的费用与效果也是可以通过刚刚的近似计算方法计算出来的哟！
哦？

3 生活中也会用得到的函数

听说过饮料的生产大户S公司吧？

那么，S公司的董事为了提高该公司畅销商品的利润，是要增加 还是要减少广告的播出时间呢？

嗯……

……

话说回来，在我们总社的时候，某人一个人就能搞定这样的问题……那家伙可真是干劲十足……

来吧！
让我试试！
快点说来听听！

饮料生产大户S公司每个月电视广告的播放时间设为x小时，x小时的广告所带来的商品销售额的利润可以表示为 $f(x)=20\sqrt{x}$ 亿日元。

套餐 680
煎饺
辛辣
叉烧

现在，S公司一个月累计播放广告4小时。



由此可知，
$f(4)=20\sqrt{4}=40$，
所以可以带来
40亿日元的利润。

这里，依照广告播放合约，每分钟1000万日元。

每分钟广告=1000万日元

啊
1000万!?



$f(x)=20\sqrt{x}$亿日元
每分钟广告=1000万日元

那么，新就任的董事重新考虑了广告的播放时间。

他会增加广告的播放时间，还是减少广告的播放时间呢？



嗯？



步骤1

这里的 $f(x)=20\sqrt{x}$ 亿日元是一个复杂的函数，所以就用一次函数进行近似，再大致地进行估算，来试试看吧！

$f(x)=20\sqrt{x}$ 亿日元

⇩ 近似

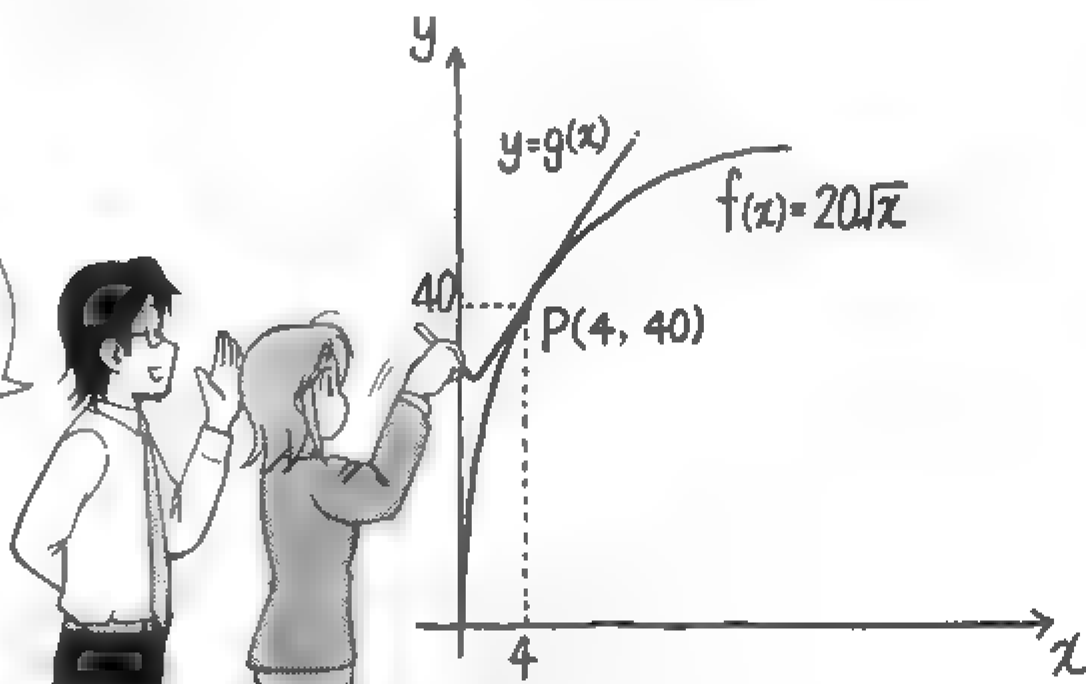
$y=g(x)$

全部用一次函数还不行，还需要在目前的播放时间 $x=4$ 小时附近进行近似。



步骤2

过点 $P(4,40)$ 画出函数 $y=f(x)=20\sqrt{x}$ 图形的切线[1]。



对于 $f(x)=20\sqrt{x}$ 来说，$f'(4)$为

$$\frac{f(4+\varepsilon)-f(4)}{\varepsilon}=\frac{20\sqrt{4+\varepsilon}-20\times 2}{\varepsilon}=20\frac{(\sqrt{4+\varepsilon}-2)\times(\sqrt{4+\varepsilon}+2)}{\varepsilon\times(\sqrt{4+\varepsilon}+2)}$$

$$=20\frac{4+\varepsilon-4}{\varepsilon(\sqrt{4+\varepsilon}+2)}=\frac{20}{\sqrt{4+\varepsilon}+2}\quad\text{——}(☆)$$

当$\varepsilon\to 0$时，分母$=\sqrt{4+\varepsilon}+2\to 4$，于是(☆)$\to\frac{20}{4}=5$

所以，近似一次函数 $g(x)=5(x-4)+40=5x+20$。

1 切线的计算（也可以参见第39页中导函数的讲解内容）。

如果x变化得太大，比如像1小时，那么$f(x)$和$g(x)$就会相差甚远，这样的近似也就没意义了。实际上，即使是广告的播放时间要有所增减，那也是少许的一点点时间而已。



比方说，考虑增减6分钟（=0.1小时），这种变化程度比较小的情况下，误差率也会比较小，那么这个近似才会有效。

步骤3

在$x=4$小时附近，将$f(x)$大致看做$g(x)=5x+20$。

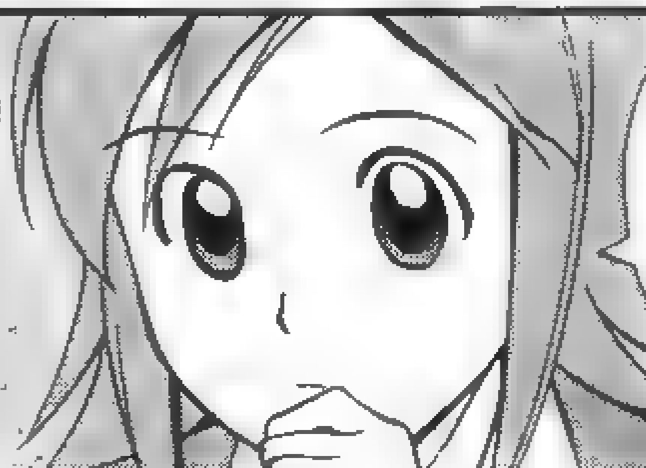
$g(x)$中x的系数为5，表示播放时长每增加1小时，就会带来5亿日元的收入。所以，如果仅仅变化6分钟（=0.1小时）的话？

这样的话，增加6分钟利润大约会增加$5\times0.1=0.5$亿日元。



没错！但是播放时长增加6分钟，相应的广告费用会增加多少呢？

广告费要花掉$6\times0.1=0.6$亿日元……



反过来说，少播放6分钟广告，就损失约0.5亿日元利润；不过就不用支付0.6亿日元的广告费用。这么说来……

答案就是……
做出了减少广告播放时间的决定！

完全正确！

如此说来，在现实社会中，人们会在商务、生活等诸多场合中使用到函数了。

无论是有意也好，无意也罢都会出现这种情况的。

可是……
您方才说的，在我们总社能解决这样的问题的人……会是谁呢？


就 就是
增井呀！
嘶
嘶
嘶
惊讶
啊——


可——可是，刚刚
不是说干劲十足……
的吗？
是干劲十足的
分社员工啊！


本以为解决了这个问题，
我也就成为干劲十足的媒体
人了……
呜
呜
…


瞪


拖
!?

真可恶！
我不会输给你的——

饭也吃过了，
还不想办法
把车弄好！！

拖
拖拖



4 近似一次函数的求解方法

求出在 $x=a$ 处，用来近似函数 $f(x)$ 的一次函数 $g(x)=kx+l$。

只要求出斜率就可以了。

$g(x)=k(x-a)+f(a)$ （当 $x=a$ 时，$g(x)$ 同 $f(a)$ 的值相同）……Ⓐ

接下来，先将 x 的值从 a 改变到 $a+$ ，再计算一下误差率。

$$(\text{误差率})=\frac{(\text{改变后的}f\text{与}g\text{的差异})}{\text{从}x=a\text{开始的改变量}}$$

$$=\frac{f(a+\varepsilon)-g(a+\varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$=\frac{f(a+\varepsilon)-(k\varepsilon+f(a))}{\varepsilon}$$

← $g(a+\varepsilon)=k(a+\varepsilon-a)+f(a)$
$=k\varepsilon+f(a)$

$$=\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}-k\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0$$

← ε 趋近于0时，误差率也趋近于0

$$k=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}$$

← ε 趋近于0时，$\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}$ 的值趋近于 k

（$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}$ 所表示的意思是，求出 ε 趋近于0时式子的值）

根据这个 k，进一步可以得出如Ⓐ所示的 $g(x)$，也就是 $f(x)$ 的近似函数。

k 被称为 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的**微分系数**。

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}$ $y=f(x)$ 图形上各个点 $(a, f(a))$ 切线的斜率记作 f'，

即在 f 上加一个撇号：

$$f'(a)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}$$

（$f'(a)$ 就是 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 处切线的斜率。）

这里可以改为 x → $f'(x)$ ←

也可以将 f' 看作是 x 的函数，所以也可以说成"由函数 f 导出的函数，即函数 f 的导函数"。

小　结

- 微积分中进行极限计算的，仅仅是误差公式。
- 极限是用来求解微分系数的。
- 微分系数，就是所给出点的切线的斜率。
- 微分系数就是变化率。

$f'(a)$（$f(x)$ 在 $x=a$处的微分系数）通过 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}$ 进行计算。

$g(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$，就是 $f(x)$的近似一次函数。

用来表示$f(x)$上点$(x, f(x))$切线的斜率的 $f'(x)$ 由 $f(x)$导出，所以称为$f(x)$的导函数。

此外，由 $y=f(x)$求解导函数 $f'(x)$ 的过程称为**微分**。$y=f(x)$的导函数的符号，除 $f'(x)$外，还可以使用如下形式：

$$y', \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, \frac{d}{dx}f(x)$$

求解常数函数[1]、一次函数[2]、二次函数的导函数[3]

(1) 求常数函数 $f(x)=\alpha$ 的导函数。$x=a$ 处的微分系数为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha-\alpha}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}0=0$$

因此，$f(x)$的导函数为 $f'(x)=0$

(2) 求一次函数 $f(x)=\alpha x+\beta$ 的导函数。$x=a$ 处的微分系数为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha(a+\varepsilon)+\beta-(a\alpha+\beta)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha=\alpha$$

因此，$f(x)$的导函数为 $f'(x)=\alpha$

1. 常数函数：Constant Function。
2. 一次函数：Linear Function。
3. 二次函数：Quadratic Function。

(3) 漫画中出现过的函数 $f(x)=x^2$ 的导函数通常这样求。$x=a$ 处的微分系数为：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(a+\varepsilon)^2-a^2}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2a\varepsilon+\varepsilon^2}{\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}(2a+\varepsilon)=2a$$

于是，在 $x=a$ 处的微分系数为 $2a$，记作：$f'(a)=2a$。因此，$f(x)$ 的导函数为 $f'(x)=2x$。

第1章 本章习题

1. 已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)=8x+10$，当 x 趋近于 5 时，这两个函数的误差率趋近于0。

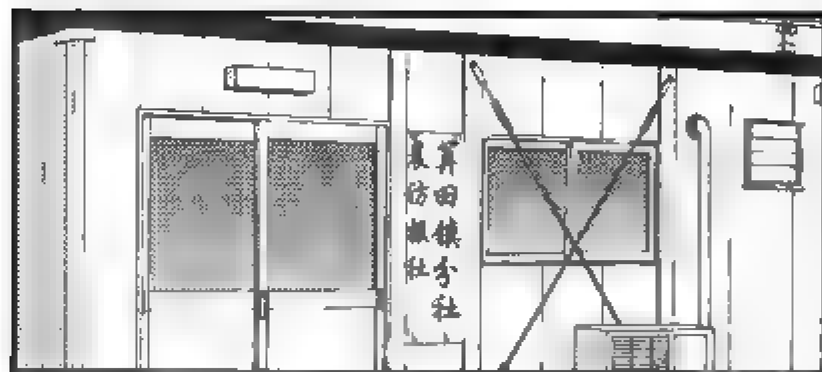
   (1) 求 $f(5)$，　　(2) 求 $f'(5)$。

2. 已知 $f(x)=x^3$，求导函数 $f'(x)$。

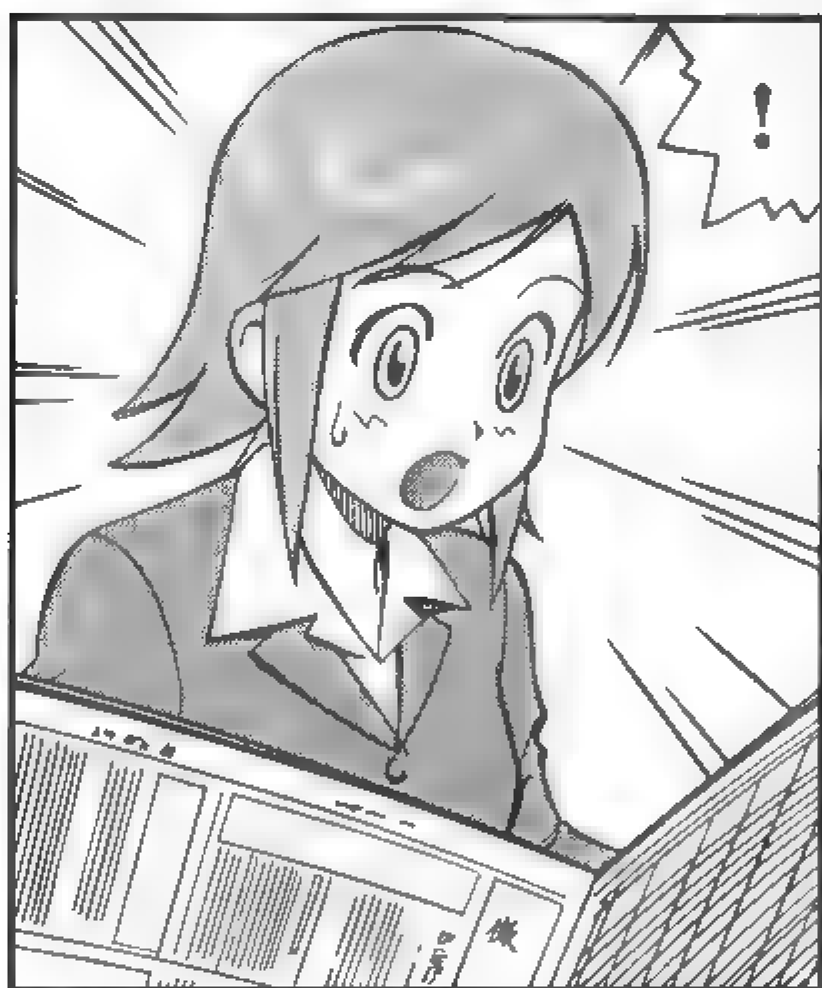
第2章

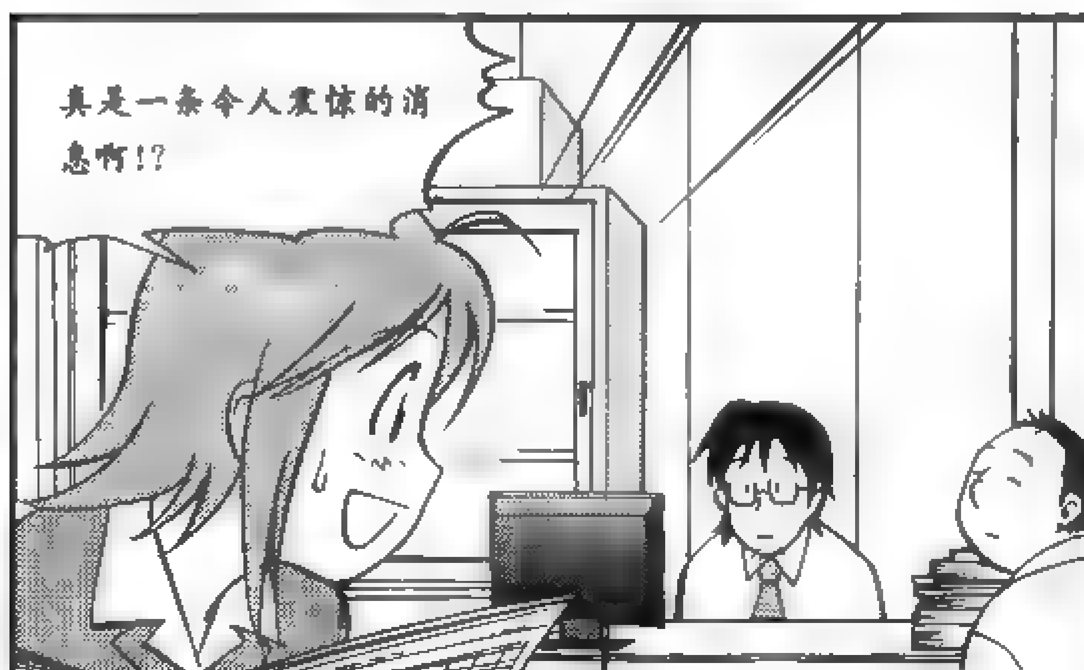
掌握微分的技巧




真田镇分社
采访报社


○○公司在○○工程的订货中
涉嫌违反反垄断法，因而被刑事起
不会吧！！
○○公司，
那可是一家著名的公司啊！


！


真是一条令人震惊的消息啊！？


……


引同小姐不是
一直都想采访
这种重大的事件吗？
那是
当然!!


喂喂！
关社长，你们
在总社的时候，
不是也要捕捉
如此劲暴的
独家新闻吗？


当然不是！
无力

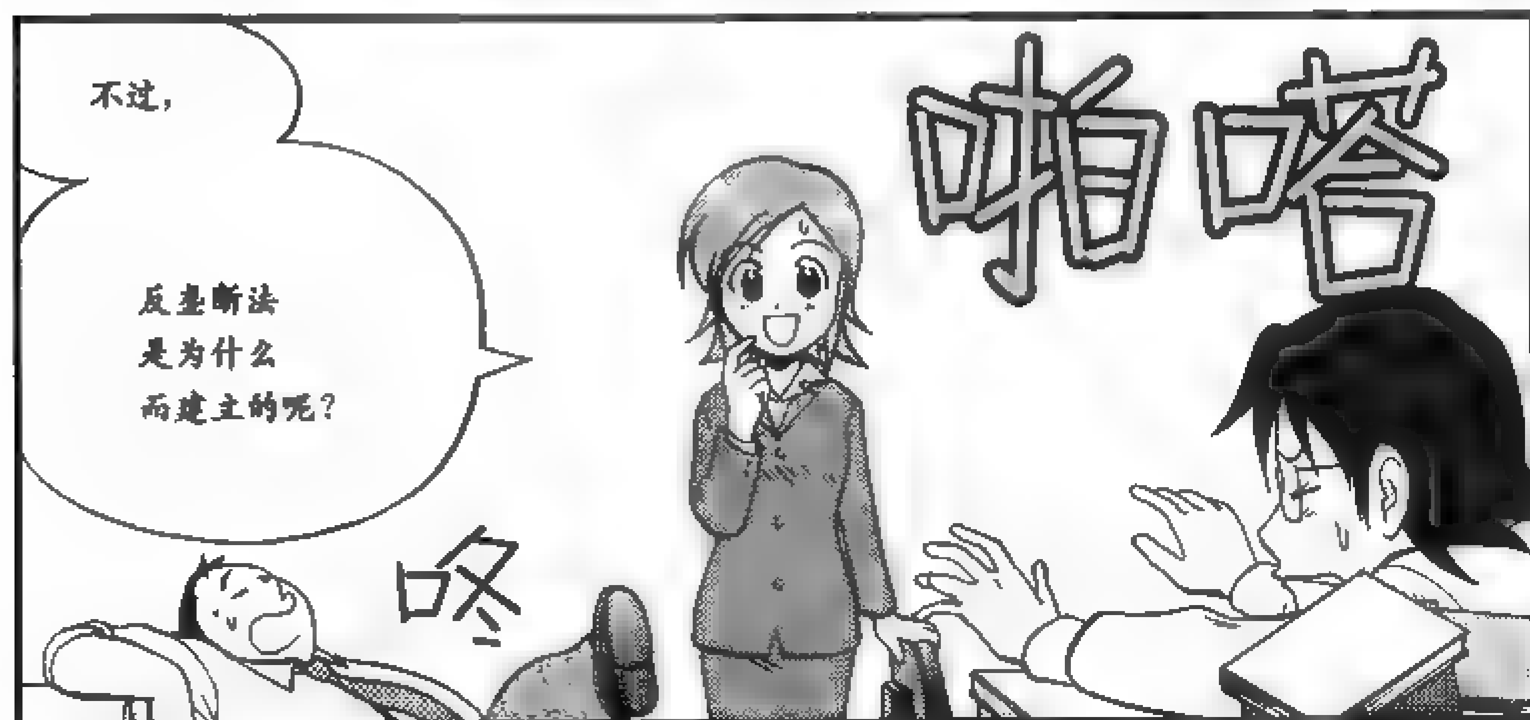

有不少漏报、误报
的情况，也有因为
写错垂询电话而写
道歉公告的情况。
有什么
可骄傲的！
哈
哈
哈

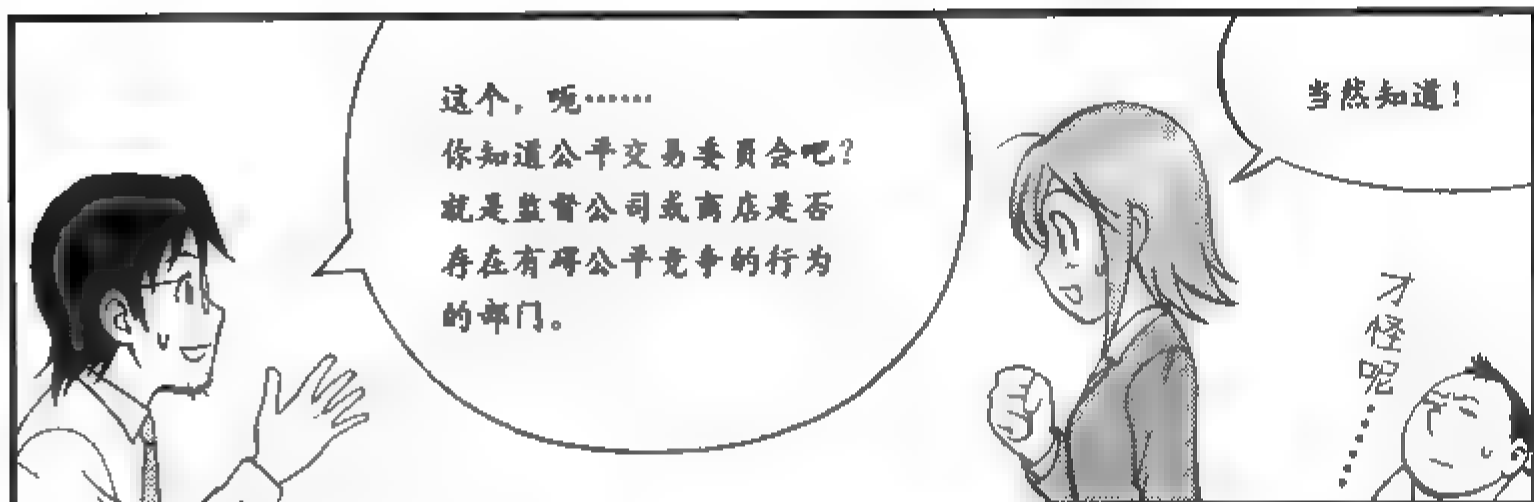

好了，
引同小姐！
稍安勿躁。
我明白，你想在
报刊传媒业大展
拳脚，不过还是
要重视基础啊！


我个人认为，还是要从普通大众的视角看待问题。
尽量避免过多地使用专业术语，
因为那样是没有水平的做法。
是！


此外，千万不要不懂装懂。
不管是什么问题，只要是不懂的就要调查或请教。
增井虽然还年轻，但是他的调查能力还是很出众的。
呵呵~


我绝对不会不懂装懂的！
啊——


不过，
反垄断法是为什么而建立的呢？
啪嗒
咚


这个，呃……
你知道公平交易委員会吧？就是监督公司或商店是否存在有碍公平竞争的行为的部门。
当然知道！
才怪呢……


公司或者商店都在努力地为消费者提供质量更好、价格更便宜的商品。
特价
这样就会导致公司或商店在商品的品质和价格上进行竞争。


如果有些人进行不择手段的竞争，就会出现干扰公平竞争的情况。那么，对于消费者来说，是非常不利的。公平交易委員会就是负责监管，以避免此类事情发生的。
原来如此。


实际上，此处的反垄断法也需要用到微分。在此，我先来讲一下“电梯”。
???


因为要用到和的微分公式，请你一定要记住它。

1 和的微分

公式 2-1 | 和的微分公式

$h(x)=f(x)+g(x)$时，

$h'(x)=f'(x)+g'(x)$

和的微分，也就是微分的和。

什么意思？

我们已经了解如何在 $x=a$ 附近进行近似计算。

之前我们做过的哦

$$f(x)\underset{\text{近似}}{\sim}f'(a)(x-a)+f(a) \quad \text{——①}$$

$$g(x)\underset{\text{近似}}{\sim}g'(a)(x-a)+g(a) \quad \text{——②}$$

咔

此时，

$$h(x)\underset{\text{近似}}{\sim}k(x-a)+l \quad \text{——③}$$

……我们希望求出其中的 k。

将①和②代入 $h(x)=f(x)+g(x)$

嗯嗯

于是，有……

$$h(x) \sim f'(a)(x-a)+f(a)+g'(a)(x-a)+g(a) \quad —④$$

把③和④中 $(x-a)$ 的系数提取出来。

嗯。

$(x-a)$

$k=f'(a)+g'(a)$

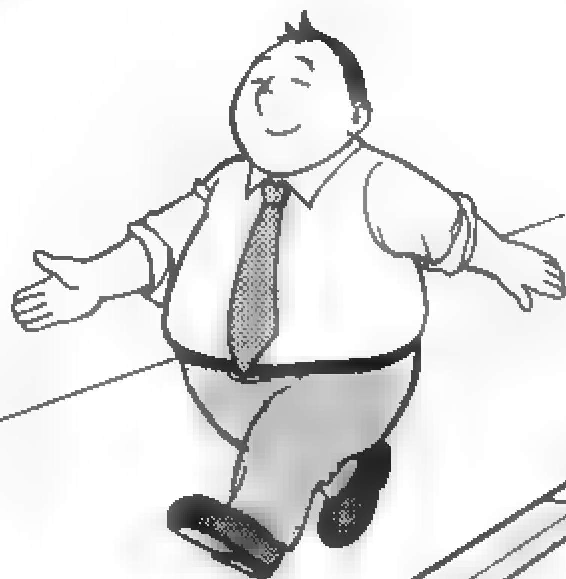
没错！

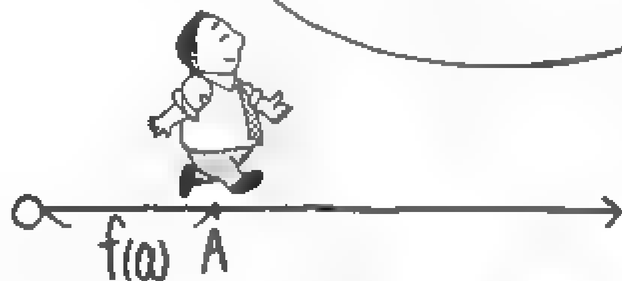
如此一来，就能得出 $h'(a)=f'(a)+g'(a)$。

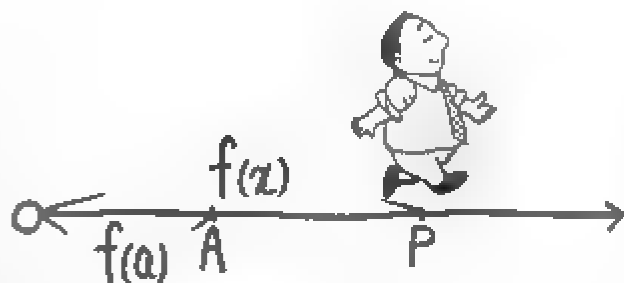
接下来，再来讲讲“电梯”。

现在，假设增井正走在普通的人行道上。

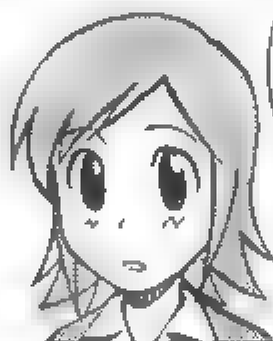
虽然不是很情愿，但还得想……

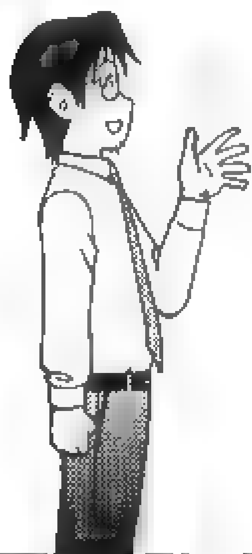












$$f(x) \underset{\text{近似}}{\sim} f'(a)(x-a)+f(a)$$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{\text{近似}}{\sim} f'(a)$$







这次换成在电梯上走。

x分钟内移动$g(x)$m

电梯 x 分钟内移动 $f(x)$m，在这个电梯上测量，增井 x 分钟移动了 $g(x)$m。

x分钟内移动$f(x)$m

那么，增井在 x 分钟内移动的距离就变成 $h(x)=f(x)+g(x)$。

那么，$h'(x)$ $f'(x)+g'(x)$ 表示的是什么意思呢？

从地面上看，增井的移动速度就会变成他在电梯上的速度，同电梯本身的速度之和……是这样吧？

没错，就是这样！

可是，这不是理所当然的事情吗？这和反垄断法有什么关系啊？

别急，再等一下，其中的基本原理才是关键。

接下来，再讲一条基本原理——积的微分。这也好比是在做饭，要预先做好准备，所以请先将它们记住。

是！

呼
呼
呼
呼

2 积的微分

公式 2-2 | 积的微分公式

当 $h(x)=f(x)g(x)$ 时，

$$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

积的微分就是逐一进行微分后再彼此相加。





$$f(x) \sim f'(a)(x-a)+f(a)$$
近似

$$g(x) \sim g'(a)(x-a)+g(a)$$
近似

$$h(x)=f(x)g(x)\sim k(x-a)+l$$

$$h(x)\sim\{f'(a)(x-a)+f(a)\}\{g'(a)(x-a)+g(a)\}$$

此时，只需从两个式子的右边提取出 $(x-a)$ 项就可以了！于是……



$$\{f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\}(x-a)\sim k(x-a)$$

$$k=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$

这样就清楚了。

那么，我们使用微分来说明一下，为何不能允许刚刚所说的垄断。

这类社会问题要如何用微分进行解释呢？

与其说是正义或真理……不如说是道义的问题。

不！
要更为冷静地
观察世间的事物。

市场中存在着大量的企业，它们所提供的是无差别的商品。这样的市场环境称为“完全竞争市场”。

“完全竞争市场”

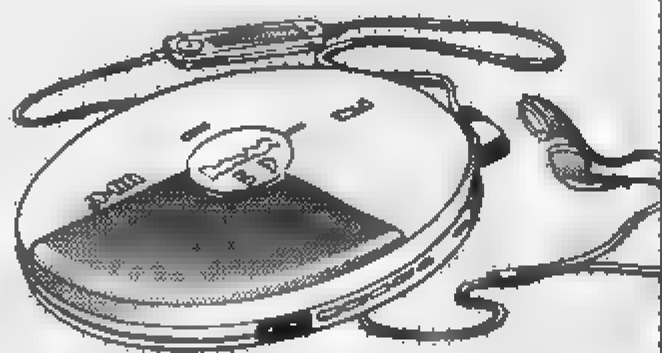
你能举个例子吗？

嗯——
比如，
音像出租店？

说的没错。在完全竞争市场中的企业，接受了由市场决定的商品价格，只要能产生利润，就会进行生产和供应。

1 实际上，音像出租店中也有比较有名的连锁店，对于任何商品来说都是有知名品牌的，完全竞争市场是不存在的。所以说，所谓的完全竞争市场只是虚构的理想状态而已。

例如，某生产CD播放机的企业正在考虑是否会进一步增产，该播放器的市场价格为每台12 000日元。



增产的费用是每台1万日元的话，那么这个企业就会增产。毕竟是有利可图嘛……



由于很多企业生产同样的产品，所以该公司并不认为其所增产的程度会引起商品价格的下跌。

不过，由于增产所导致的生产效率逐渐下降，该企业每增产1台的成本早晚有一天会与市场价格12 000日元相同。在此基础上再继续增产的话，就不划算了，因此产量会固定下来。

就是说

（价格）＝（增产1台的费用）

嗯
嗯

与之相比，仅由一家公司独家供应某商品而产生的所谓的“垄断市场”，其情况就有所不同了。

由于供应此商品的公司只有这一家，增加产量的话就会导致价格下跌。

垄断



市场

现在，假设产量仅为 x，并且在供应时能够全部售出，其售出价格 P 的函数为 $P(x)$。

顺便说一下，此时 x 增加的话价格就会下跌，用来表示价格变化的 $P'(x)$ 是负值。

没错！
此时的销售额
就是这样。

呵呵

销售额 $= h(x) =$ 价格 × 供应量 $= P(x) \times x$

公式 2-3

由于 $h(x) \sim h'(a)(x-a)+h(a)$

$(h(x)-h(a)) \sim h'(a)\,(x-a)$

$h(x)-h(a)$ → 新增加的销售额

$(x-a)$ → 增加的产量

由此可知，每增产一台获得的新增销售额为 $h'(a)$。

我明白了！我们将这个与生产费用进行比较，再决定是否增产就可以了。

是这样！
这里的 $h(x) = P(x)x$，
所以回忆一下，
刚刚讲的积的微分。

就是逐一微分，
对吧！

就是 $h'(a)=P'(a)a+P(a)\times 1$[1]！

啪

这就是说，在它刚好要低于增产1台所需费用的时候，就应该停止生产了。

也就是说，产量为 a 时，则有 $P'(a)a+P(a)=$ 费用。（$P'(a)a$：负值；$P(a)$：价格）考虑到第一项为负值，所以，很明显，市场价格 $P(a)>$ 费用。

无论其市场价格是否高于再生产1台所需的制作成本，企业都会决定停止生产。

就是说，再继续生产的话，就是违法的。

原来如此

没错……
但是他们并没有恶意而仅仅是合理的举动，我们必须冷静地看透这一点。

请再看一遍这个式子。

1 x的微分为1(参见第40页)。

(再增产1台的时候，销售额的增量)

$$=h'(a)=P'(a)a+P(a)$$

上式中的后两项：

$P(a)$是再增产1台时所能获得的销售额。

$P'(a)a$=(价格下跌的程度)×生产台数，这就意味着价格的下跌会使全部生产的商品遭受损失。





如果是那样的话，就绝不会对社会造成危害，其行为不过是遵循了以追求利益为目的的资本主义原则。

所以我们不能责备这个企业。

但是，如果从事件结果来看，对于消费者和社会来说，并不希望形成“物以稀为贵”的状态，所以才会得出“垄断”是为制度（法律）所禁止的，这样的结论。



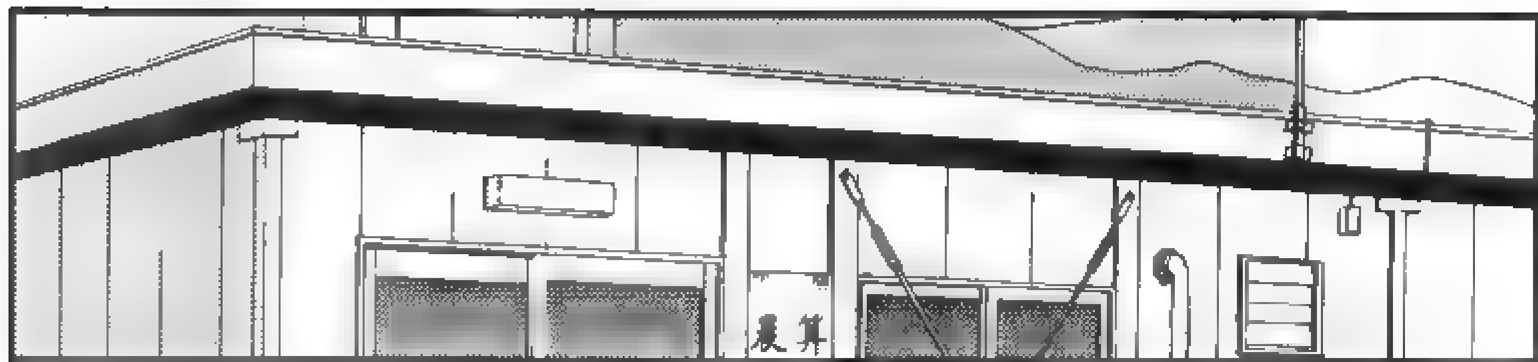


那——
请你教教我吧！

爱情!?
成人之间的爱情
要如何解释呢？

咚～




晨算

铃铃铃
您好，
晨访报社
算田镇分社……


部……部长！

晨访报社

关于你提出的那篇出问题报道，K报社希望详细了解一下。

啊……

说是想知道整件事的原委。也许是你挽回名誉的大好时机。

嗯……
好的……

非常感谢您，
我会好好考虑的。

……

怎么啦？
这可不是以往的关社长啊！

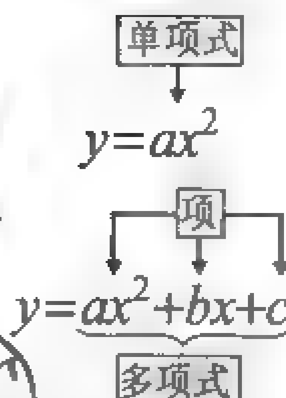
该如何是好呢……

……

……
啊!? 哎呀！
没什么大不了的……

3 多项式的微分





我给你把多项式的微分公式总结一下，

你背下来吧。只要将三个公式联合起来使用，就可以对多项式进行微分了。

公式 2-4 | 幂函数的导数

$h(x)=x^n$ 的导数为 $h'(x)=nx^{n-1}$

为什么会这样呢？只要反复使用积的微分公式就可以了。

当 $h(x)=x^2$ 时，可以变形为 $h(x)=x\times x$，所以 $h'(x)=x\times 1+1\times x=2x$

确实符合上述公式。

使用这个

当 $h(x)=x^3$ 时，可以变形为 $h(x)=x^2\times x$

所以 $h'(x)=(x^2)'\times x+x^2\times(x)'=(2x)x+x^2\times 1=3x^2$

确实符合上述公式。

使用这个

当 $h(x)=x^4$ 时，可以变形为 $h(x)=x^3\times x$

所以 $h'(x)=(x^3)'\times x+x^3\times(x)'=3x^2\times x+x^3\times 1=4x^3$

确实符合上述公式。

依此类推，只要将以下三个公式联合起来使用，就一定能对多项式进行微分。

公式 2-5 | 和、常数倍、x^n 的微分公式

和的微分公式	$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$	——①
常系数微分公式	$\{\alpha f(x)\}'=\alpha f'(x)$	——②
x^n的微分公式	$\{x^n\}'=nx^{n-1}$	——③

◆ 试着对 $h(x)=x^3+2x^2+5x+3$ 进行微分。

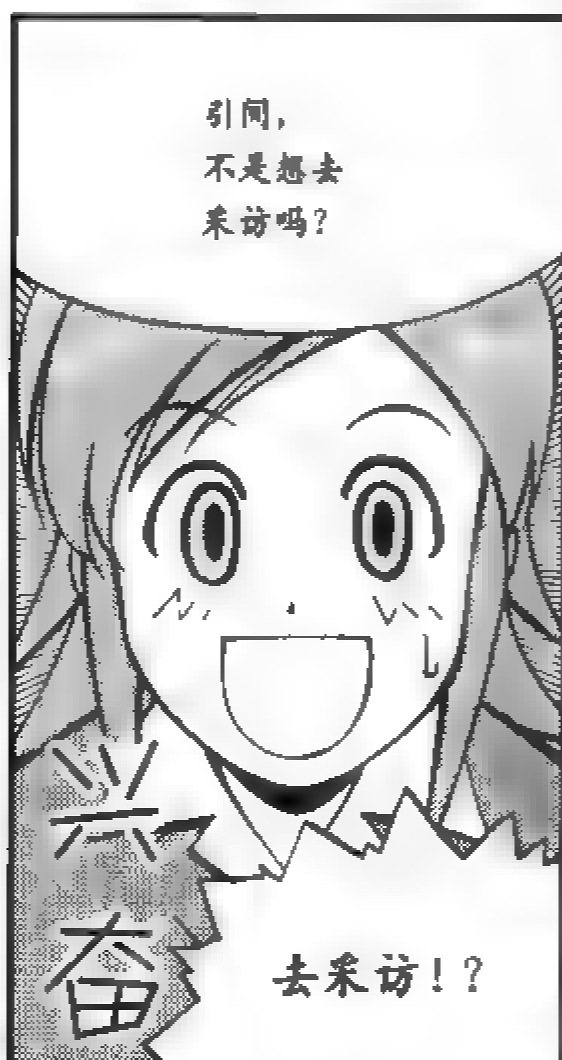
$h'(x)=\{x^3+2x^2+5x+3\}' \underset{①}{=} (x^3)'+(2x^2)'+(5x)'+(3)'$

$\underset{②}{=}(x^3)'+2(x^2)'+5(x)' \underset{③}{=} 3x^2+2(2x)+5\times 1=3x^2+4x+5$


呼……

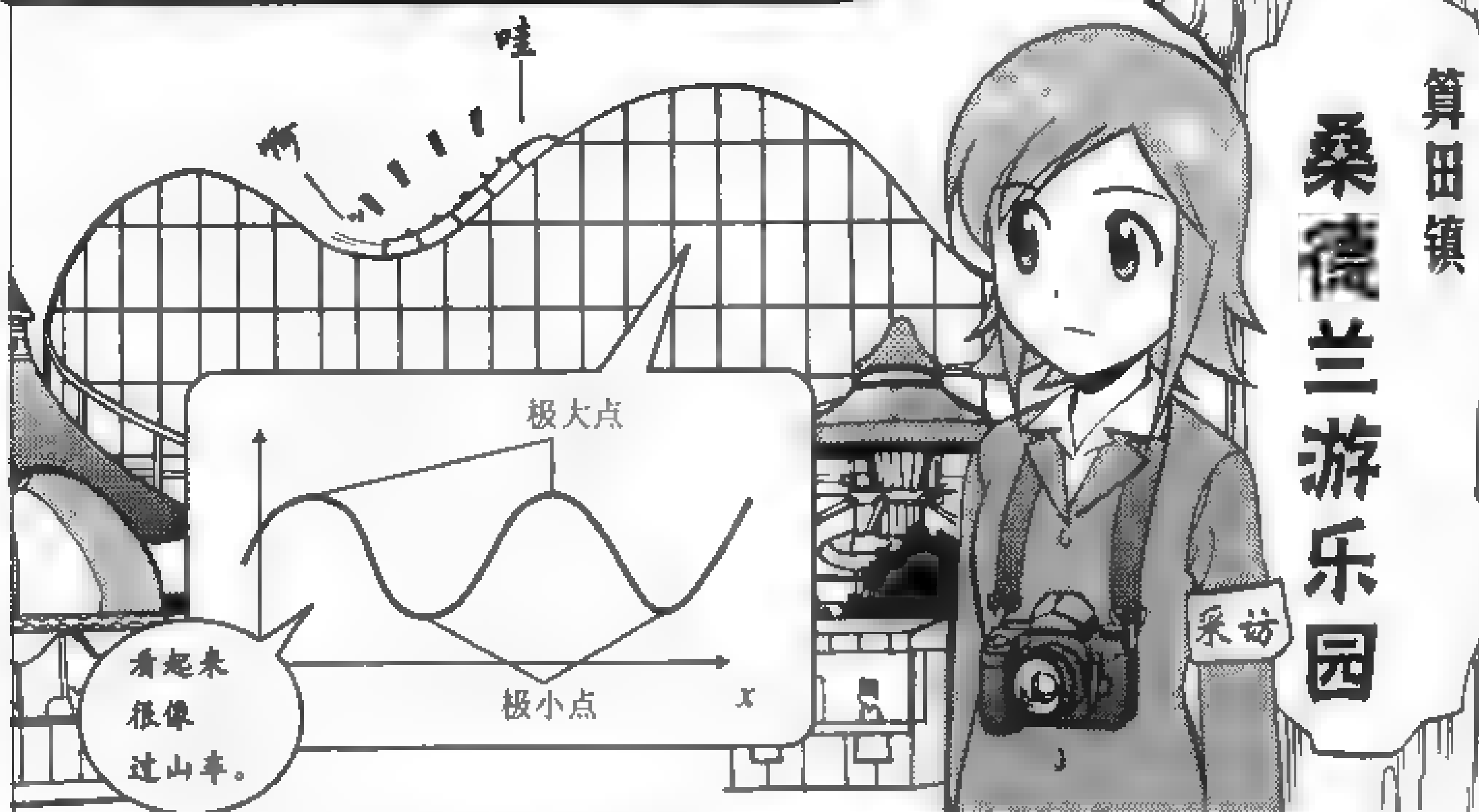

跟我
出来一下……
……


不要担心啦！
好啦，
先不说这个……


引间，
不是想去
采访吗？
兴奋
去采访！？


嗯！
算田镇游乐园的
过山车，好像是
被改装了。
乡下的
过山车
……

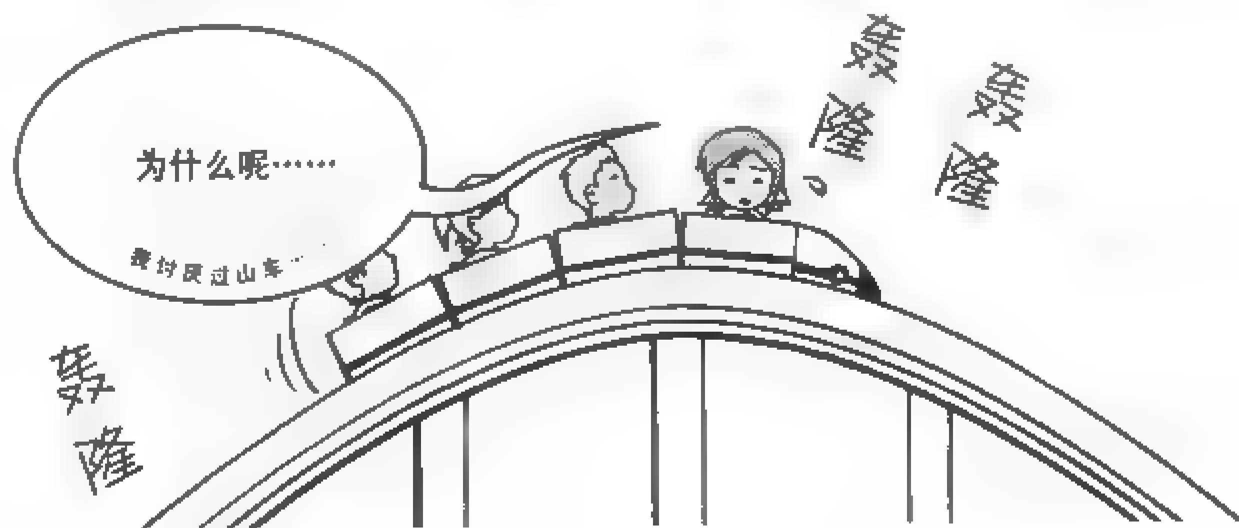
4 由"微分=0"可知极值



极大点和极小点是函数增减性发生变化的地方，对研究函数的性质来说是很重要的。极大点、极小点常常会变成最大点、最小点，是求解某些(最优解)问题时十分关键的点。

定理 2-1 (极值条件)
$y=f(x)$ 在 $x=a$ 处为极大点或极小点，则有 $f'(a)=0$。

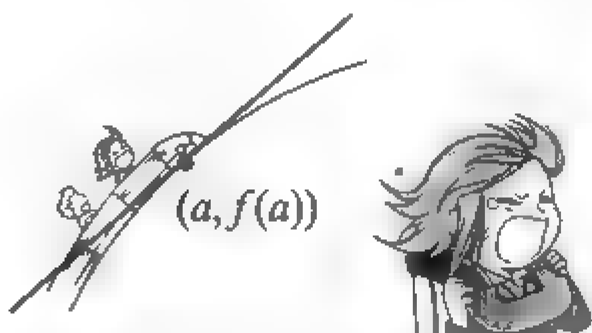
也就是说，求极大点、极小点时，只需要找到满足 $f'(a)=0$ 的 a 就可以了。



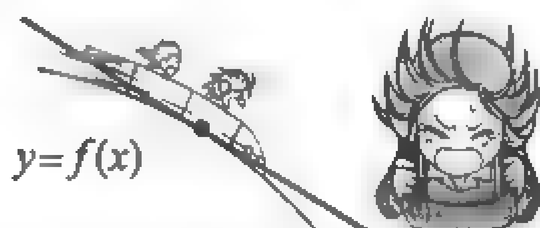
现在，令 $f'(a)$ 的值不等于 0，我们来看看 $f'(a)>0$ 时的情况。

在 $x=a$ 附近，有 $f(x)\approx f'(a)(x-a)+f(a)$。因此，

当 $f'(a)>0$ 时，所近似的一次函数在 $x=a$ 处呈现递增的趋势，因此可知 $f(x)$ 也同样呈递增趋势。就是说，过山车处于上升的状态，既没在轨道的顶端，也没在谷底。



同样，当 $f'(a)<0$ 时，
$y=f(x)$ 处于下降的状态，
既不在顶端，也不在谷底。

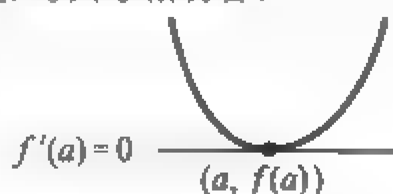


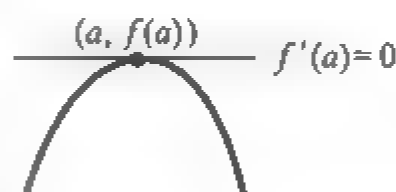
如果说 $f'(a)>0$ 和 $f'(a)<0$ 分别对应着上升和下降的状态，那么顶端或谷底所对应的只能是 $f'(a)=0$ 了。

实际上，如果 $f'(a)=0$ 的话，所近似的一次函数

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)=0\times(x-a)+f(a)$$

为水平直线，与图形相吻合。





总结以上内容，也可以得到如下定理。



定理 2-2 （增减性的判定条件）

当 $f'(a)>0$ 时，在 $x=a$ 附近 $y=f(x)$ 呈递增趋势。

当 $f'(a)<0$ 时，在 $x=a$ 附近 $y=f(x)$ 呈递减趋势。


居酒屋
算田家
居酒屋
算田家
居酒屋
营业中

快乐微分啦
看清社会呀——
你终于明白我的
用心了吗？

什么！
你说什么！
开口闭口都是
微分、微分。
唉！？你这是
喝高了……

把分社的负责人
给我叫来……
啪
关社长，
再来些啤酒
怎么样？

不了，
今天不太想
喝醉。

是因为电话
的事吗？
部长怎么说？

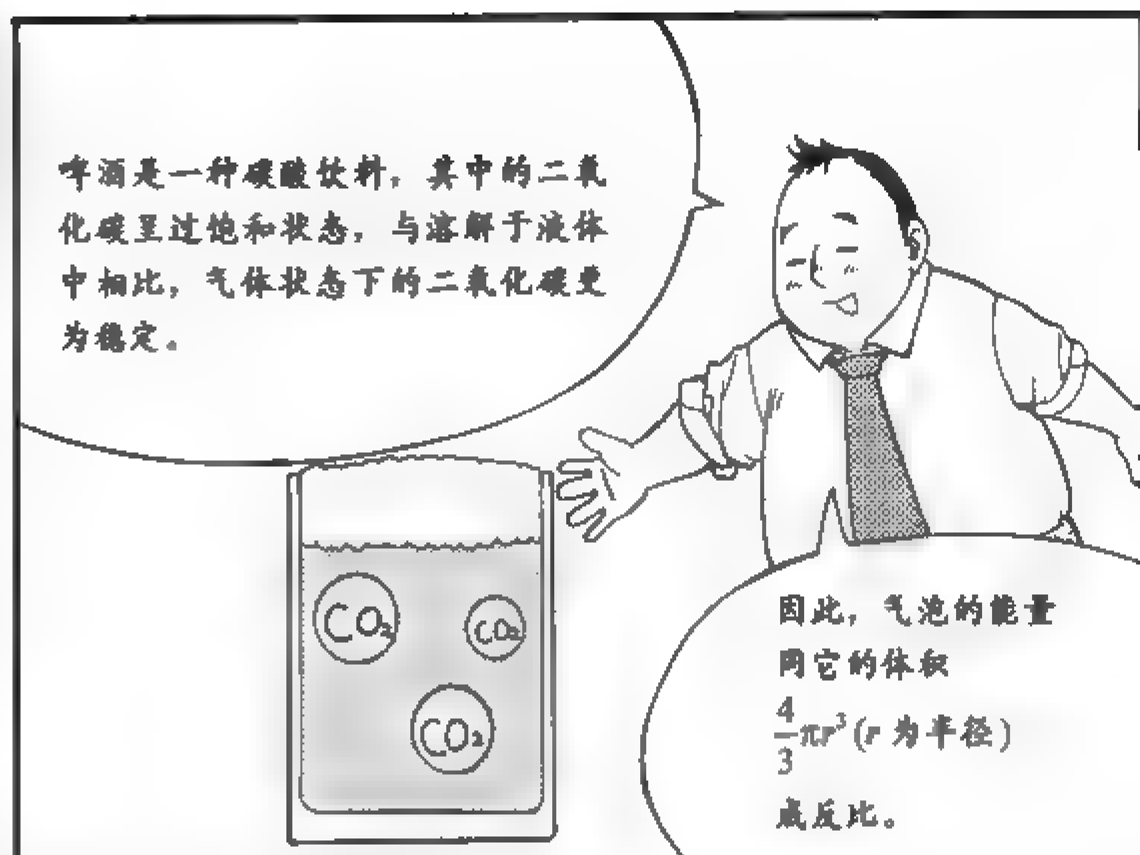


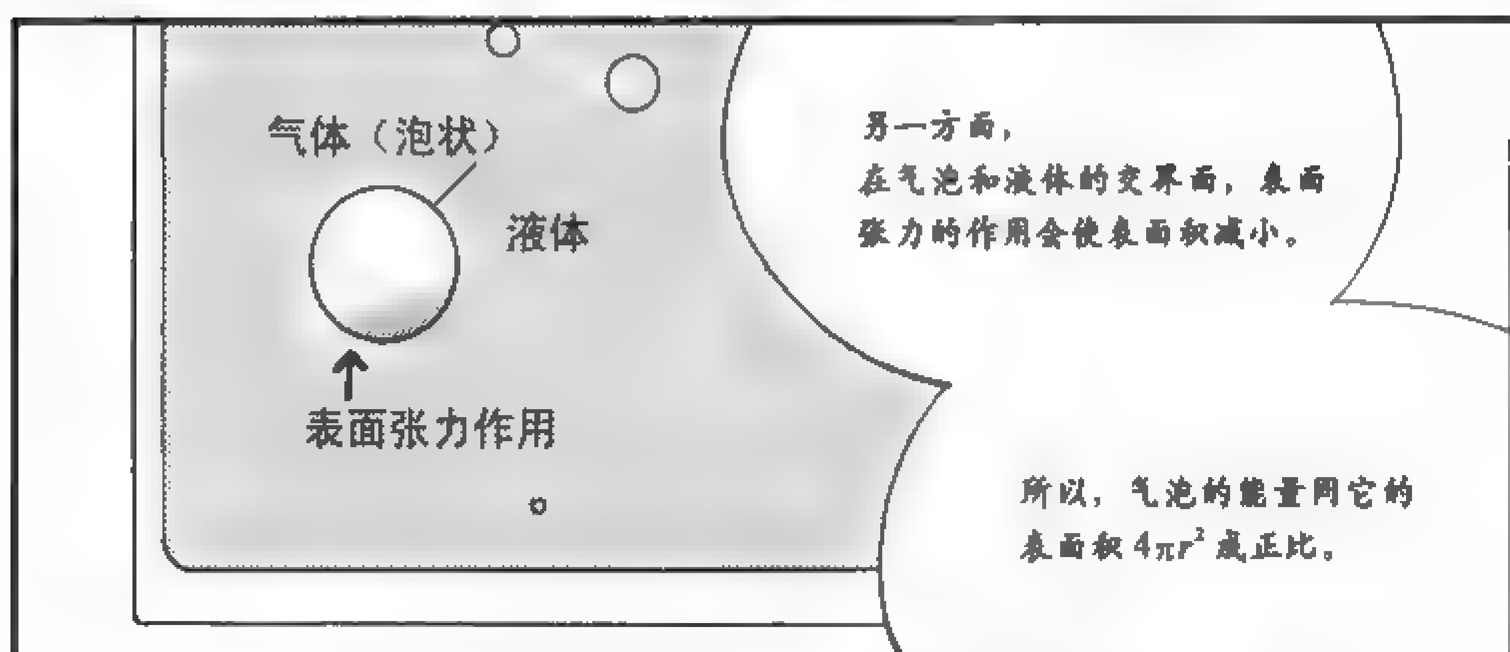


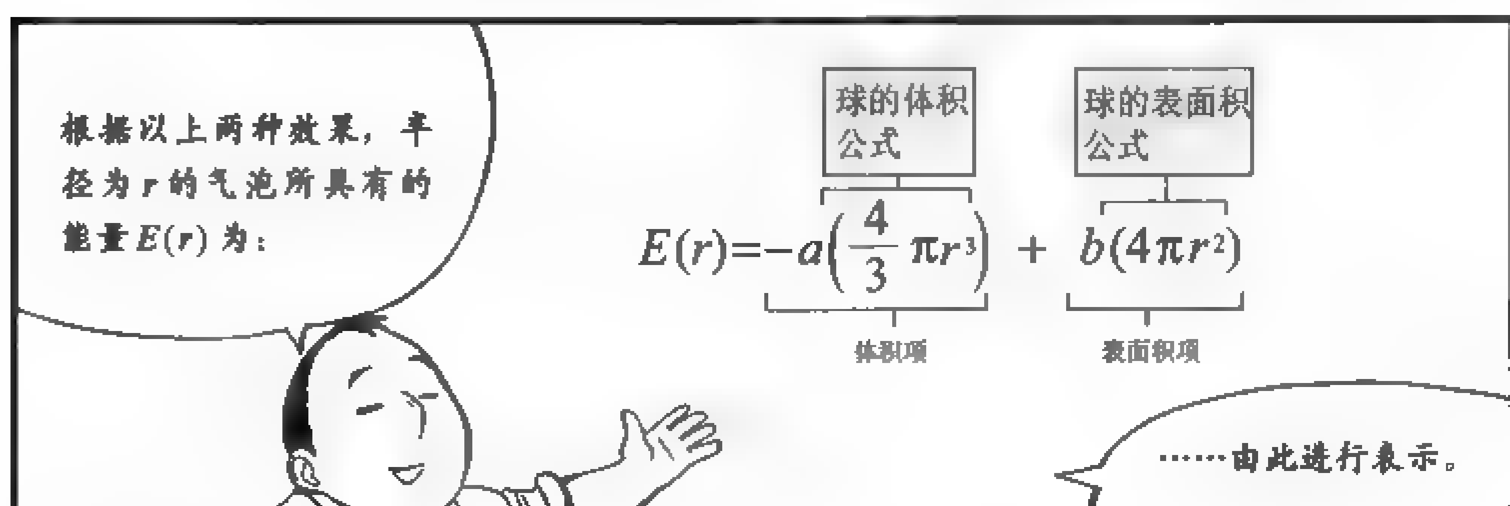
突然想出了个问题，看啤酒中的气泡，较小一些的会变得更小直到消失。

而较大一些的气泡，反而会急剧变大，上升至水面然后破裂，为什么会存在这两种现象呢？请说明一下原理吧！


微笑……
冷不防来了这么一招。


啤酒是一种碳酸饮料，其中的二氧化碳呈过饱和状态，与溶解于液体中相比，气体状态下的二氧化碳更为稳定。
CO_2
CO_2
CO_2
因此，气泡的能量同它的体积
$\frac{4}{3}\pi r^3$（r为半径）
成反比。


气体（泡状）
液体
表面张力作用
另一方面，
在气泡和液体的交界面，表面张力的作用会使表面积减小。
所以，气泡的能量同它的表面积$4\pi r^2$成正比。


根据以上两种效果，半径为r的气泡所具有的能量$E(r)$为：
球的体积公式
球的表面积公式
$$E(r)=-a\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)+b(4\pi r^2)$$
体积项
表面积项
……由此进行表示。



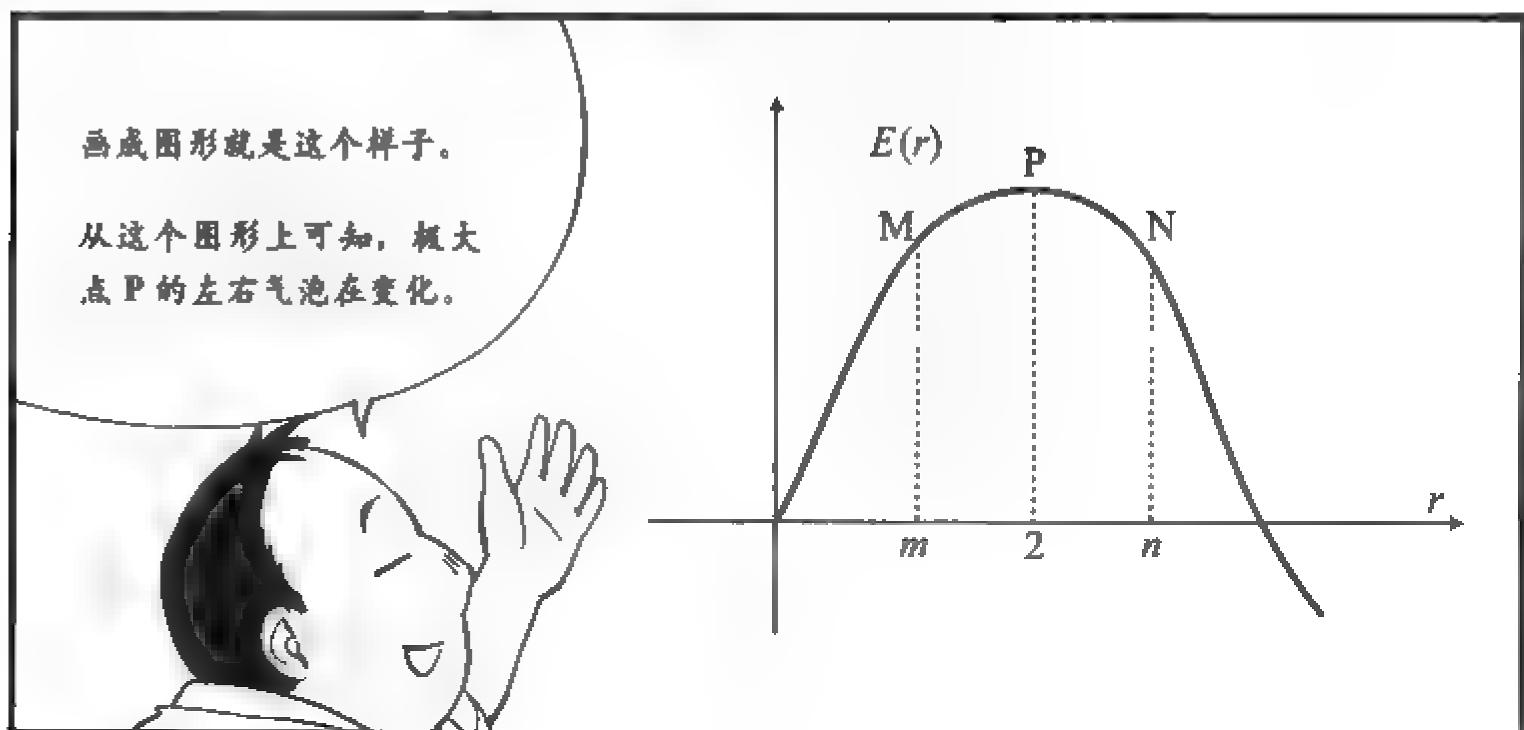


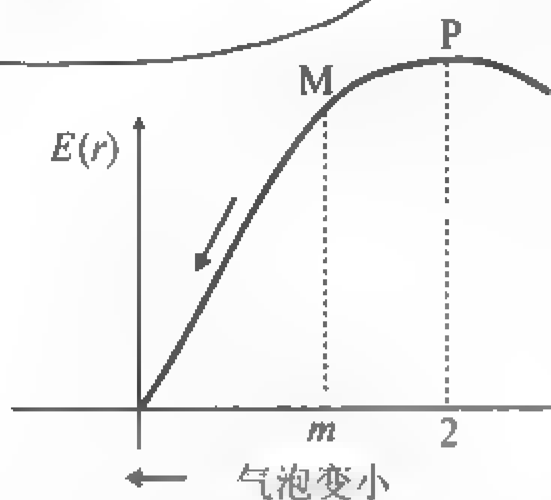


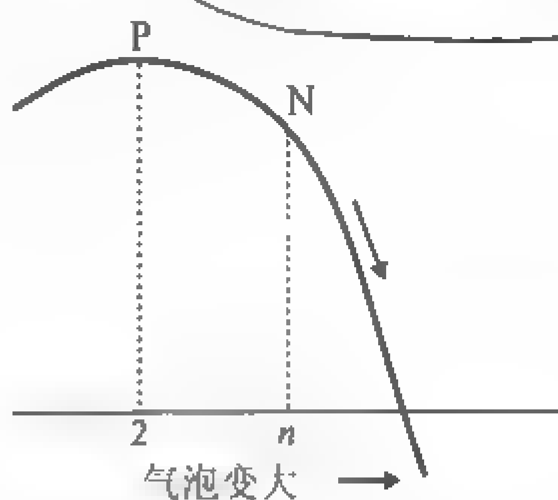
$$E(r)' = (-r^3)' + (3r^2)'$$
$$= -3r^2+6r$$
$$= -3r(r-2)$$

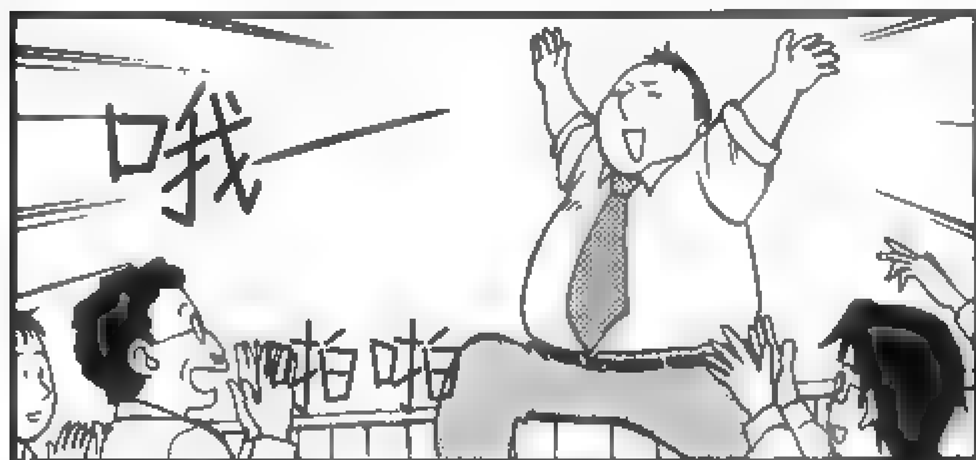
因此 $r=2$ 时，$E'(r)=0$。

当 $0<r<2$ 时，$E'(r)>0$，
当 $2<r$ 时，$E'(r)<0$，
由此可知，在 $r=2$ 处，
$E(r)$ 为极大点 P。

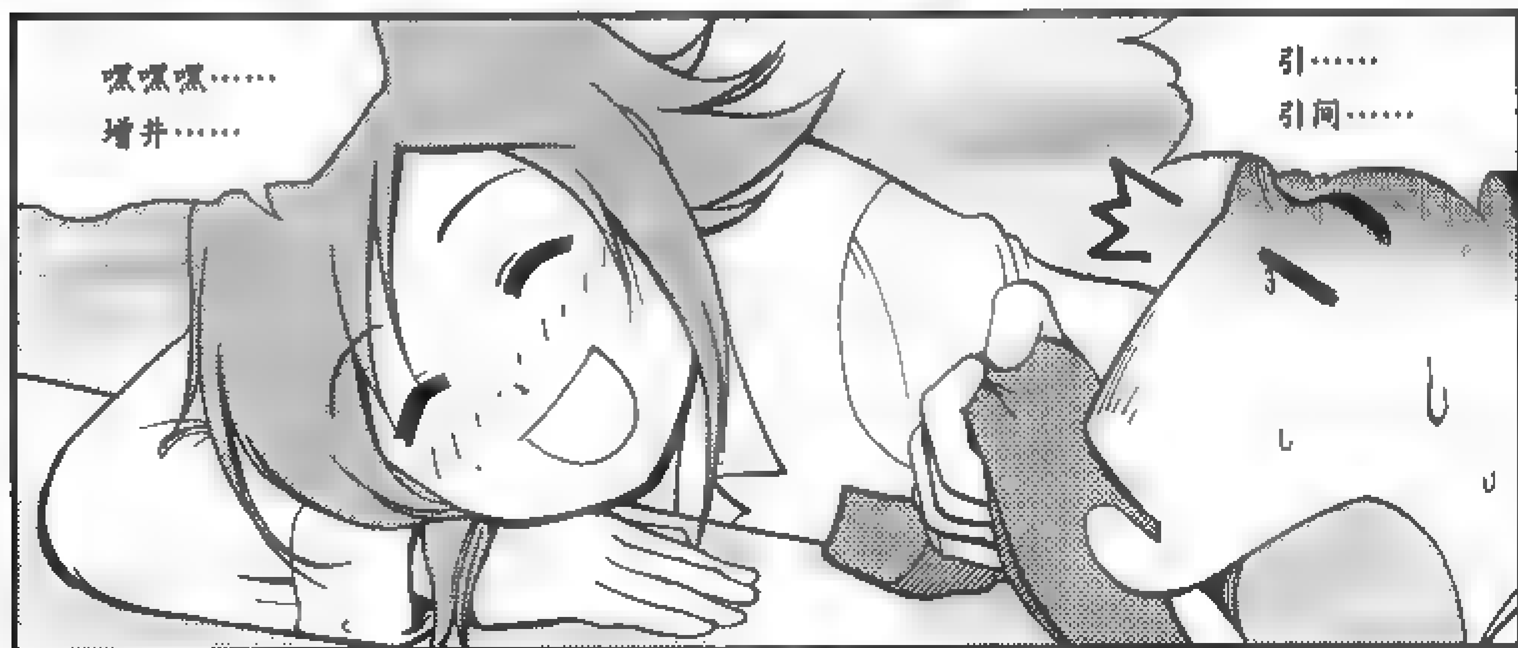



半径和能量处于点M所示状态下的气泡，若要减少气泡的能量$E(r)$，其半径就应当从m开始变小，气泡逐渐变小直至消失。
P
M
$E(r)$
m
2
← 气泡变小


反之，半径和能量处于点N所示状态下的气泡，若要减少气泡的能量$E(r)$，其半径就应当从n开始变大，不断膨胀起来，在啤酒中逐渐上升。
P
N
2
n
气泡变大 →


哦
啪啪


!?
扯


嘿嘿嘿……
增井……
引……
引间……

别在我面前搬出
什么图形和定理！

呵——
你白天和晚上的差
距也太大了吧……



那孩子……
想必也到
极大值了！

救命啊～

5 平均值定理

所谓微分，就是在$x=a$附近，将$f(x)$近似成一次函数时x的系数。即

$$f(x) \underset{近似}{\sim} f'(a)(x-a)+f(a) \quad (x在a附近)$$

但是，说到底这只不过是“近似相等”、“模拟”而已，对于位于a附近的b来说，一般会有

$$f(b) \neq f'(a)(b-a)+f(a) \quad — ①$$

两者之间完全一致的情况是不存在的。



以下定理是为了求知欲旺盛的读者所准备的。

定理 2-3 平均值定理[1]

对于a，$b(a<b)$来说，存在一个ζ，当$a<\zeta<b$时，

满足$f(b)=f'(\zeta)(b-a)+f(a)$。

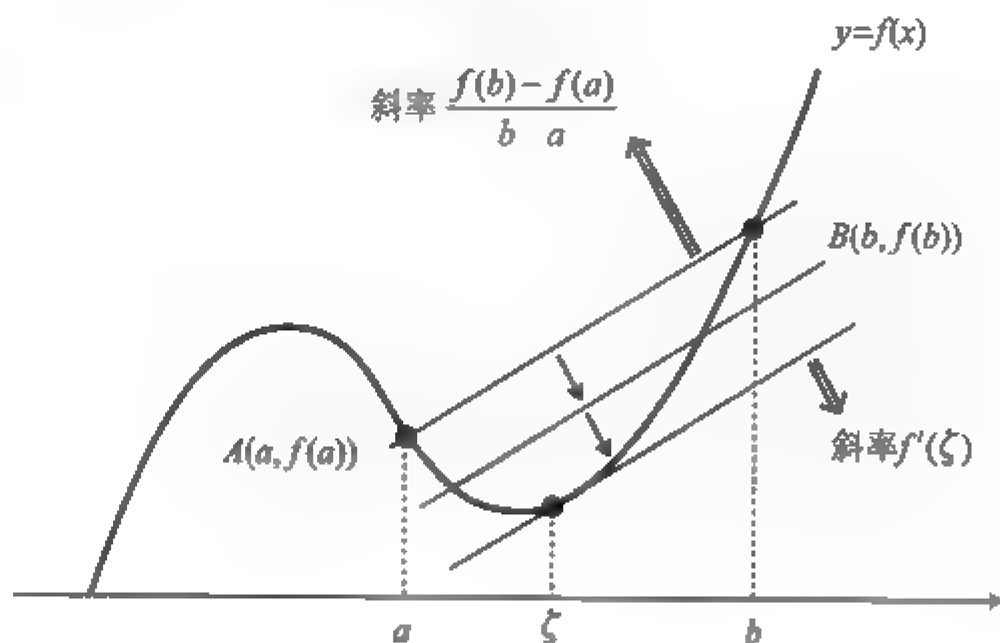
也就是说，不是$f'(a)$，而是从a向b增加的过程中的ζ，其微分值$f'(\zeta)$，能够使式子①中的等号成立。



为什么呢？

1. 平均值定理：Mean Value Theorem。

连接 $A(a,\ f(a))$，$B(b,\ f(b))$两点，得到线段 AB



于是有，$(\text{AB的斜率})=\left(\frac{y\text{的增量}}{x\text{的增量}}\right)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ——②

然后按照图上的方式将 AB 做平移。

我们终归会看到直线即将脱离图像的那一瞬间，将这一点设为$(\zeta,\ f(\zeta))$。

此时，这条直线也就成为图形的切线，其斜率为 $f'(\zeta)$。

由于进行的是平移，所以 $f'(\zeta)$的值应该与式子②的斜率相等。



因此，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\zeta),$$

去分母，将 $f(a)$ 移项后，可得

$$f(b)=f'(\zeta)(b-a)+f(a)。$$



商的微分公式

求 $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 的导函数公式。

首先，我们来求一下 $f(x)$ 的倒数——函数 $p(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ 的导函数。在 $x=a$ 附近，有 $f(x)\sim f'(a)(x-a)+f(a)$，同理，有

$$p(x)\sim p'(a)(x-a)+p(a)$$

此时，必须注意到 $f(x)p(x)=1$。

所以，$1=f(x)p(x)\sim\{f'(a)(x-a)+f(a)\}\{p'(a)(x-a)+p(a)\}$ 从右边提取出 $(x-a)$ 的系数，则右式为

$$p(a)f'(a)+f(a)p'(a)$$

由于其左边并不存在 x 项，所以等于 0。因此，有

$$p'(a)=-\frac{p(a)f'(a)}{f(a)}$$

又由于 $p(a)=\dfrac{1}{f(a)}$，将其代入分子的 $p(a)$ 中，可得

$$p'(a)=-\frac{f'(a)}{f(a)^2}$$

然后，对于 $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 来说，可以变形为 $h(x)=g(x)\times\dfrac{1}{f(x)}=g(x)p(x)$，对变形后的式子使用积的微分公式即可。

$$h'(x)=g'(x)p(x)+g(x)p'(x)=g'(x)\frac{1}{f(x)}-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

$$=\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(g)}{f(x)^2}$$

进而可以得到接下来的公式。

公式 2-6 | 商的微分公式

$$h'(x)=\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(g)}{f(x)^2}$$

复合函数的微分公式

求 $h(x)=g(f(x))$ 的导函数公式。

在 $x=a$ 附近，有 $f(x)-f(a)\sim f'(a)(x-a)$ — ①，并且

在 $y=b$ 附近，有 $g(y)-g(b)\sim g'(b)(y-b)$ — ②

于是，令 $b=f(a)$，$y=f(x)$，改写②式，在 $x=a$ 附近，有

$g(f(x))-g(f(a))\sim g'(f(a))(f(x)-f(a))$。将上式右边的 $f(x)-f(a)$ 替换为①式的右边，可得

$$g(f(x))-g(f(a))\sim g'(f(a))f'(a)(x-a)$$

又由于 $g(f(x))=h(x)$，所以上式可以写成

$h'(a)=g'(f(a))f'(a)$。进而可以得到接下来的公式。

公式 2-7 | 复合函数的微分公式

$$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$$

反函数[1]的微分公式

使用这一公式，我们可以得出 $y=f(x)$ 的反函数 $x=g(y)$ 的微分公式。对于任意 x 都存在 $x=g(f(x))$，所以对等式两边进行微分，可得

$$1=g'(f(x))f'(x)$$

因此，有 $1=g'(y)f'(x)$，就可以得到接下来的公式。

公式 2-8 | 反函数的微分公式

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

1 反函数：Inverse Function。

小结

■ 各种微分公式

	公式	关键
常系数	$(\alpha f(x))'=\alpha f'(x)$	微分之后系数保持不变。
x^n（幂函数）	$(x^n)'=nx^{n-1}$	将指数作为系数，其次数减去1。
和	$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$	和的微分就是微分的和。
积	$(f(x)g(x))'$ $=f'(x)g(x)+f'(x)g'(x)$	逐一微分后，再求和。
商	$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)'=\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{f(x)^2}$	分母取2次方。分子为两函数逐一微分后的差。
复合函数	$(g(f(x)))'=g'(f(x))f'(x)$	外层函数的微分与内层函数微分的积。
反函数	$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$	反函数的微分就是其自身微分的倒数。

第2章 本章习题

1. n为自然数，求函数$f(x)=\frac{1}{x^n}$的导函数$f'(x)$。

2. 求$f(x)=x^3-12x$的极值。

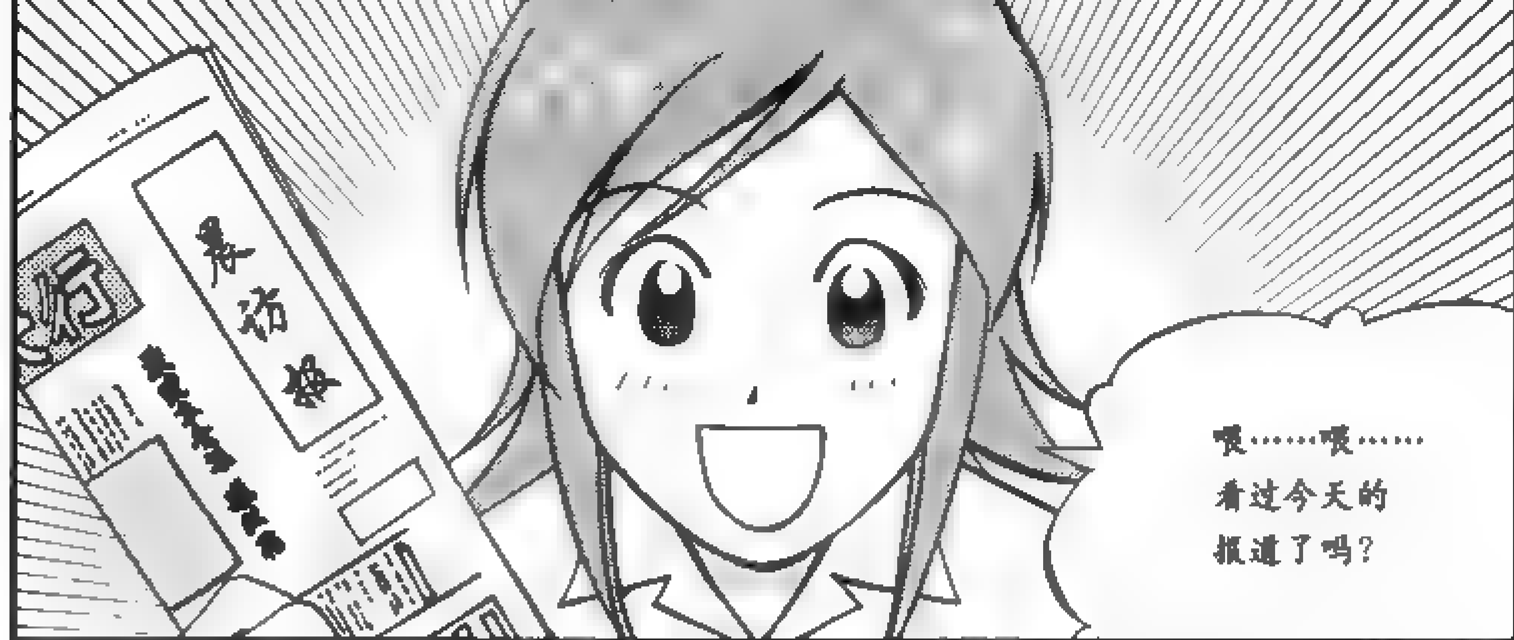
3. (1) 求$f(x)=(1-x)^3$的导函数$f'(x)$。

(2) 求$g(x)=x^2(1-x)^3$，在$0\leqslant x\leqslant 1$范围内的最大值。

第 3 章

积分——平滑变化的量的累加之和





晨访报
喂……喂……
看过今天的
报道了吗？



什么报道？
K大学研究生K
“通风路径”分析
在消除“热岛”的问题上
崭露头角
这里，这里，
这个人可是我大学
时代的一位学长！



东京都将预算用于研究生
的研究成果，以此积极应
对全球暖化问题……
真是了不起啊！
哈
哈
哈
我们学校的理工科
可是很强的哟！
呵
呵
文学系

专家怀疑二氧化碳是地球暖化的原因。



二氧化碳又被称为温室效应气体，它阻碍从地球向宇宙辐射热量，具有对地球保温的作用。

要是超过了保温作用的程度，地球就会过于温暖，那样的话，就要发生异常气象啦。

引间的学长着眼点在于分析风的流通方向，进而来降低气温。

就是提议政府建立相应的制度，禁止将高大建筑物建造在风的流通途径上。

尤其是那些在海岸或河川上流通的风，如果不阻碍它们，那就阻止地表温度的上升了。

对于现代社会来讲，应当是严格减少CO_2的排放量！

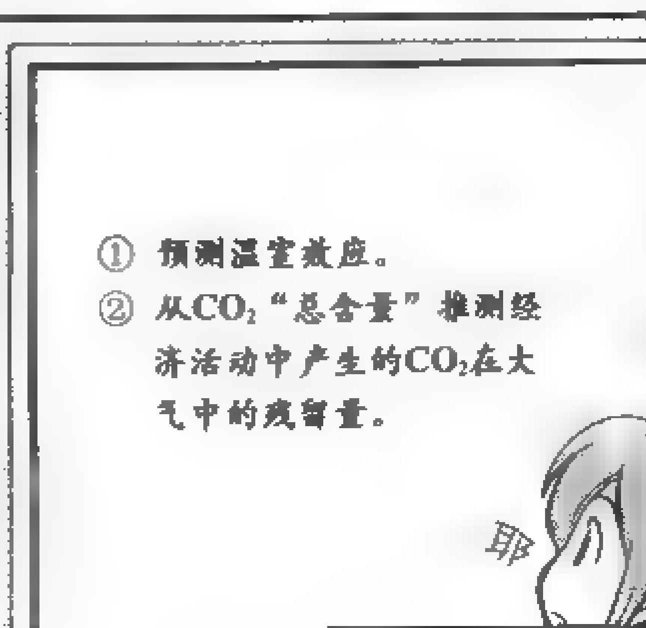
但是，努力减少CO_2的排放，是每个人的责任。


但是，我们要怎么做，才能知道大气中CO_2的含量是否在增加呢？


难道……微分？
眼前一亮


不！
虽然还是要用函数，
但是这回是积分。
通过积分，就可以知道大气中CO_2总的含量。
积分


只要知道大气中CO_2总含量，就能够预测以下问题。


① 预测温室效应。
② 从CO_2"总含量"推测经济活动中产生的CO_2在大气中的残留量。
耶


但是，计算"CO_2总含量"可是一个棘手的问题。

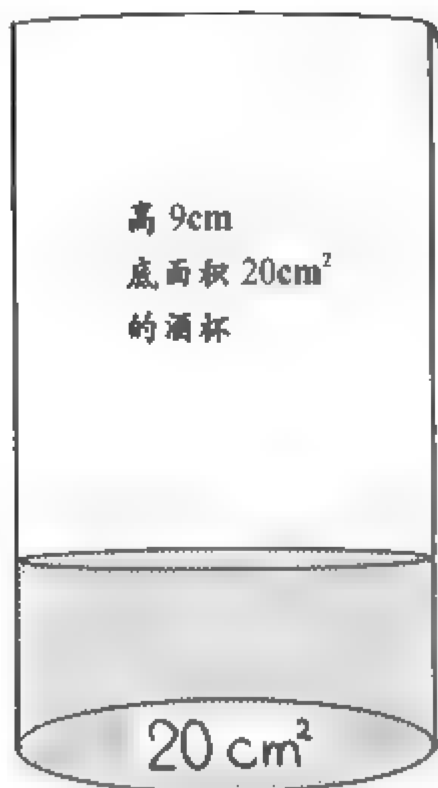

如果大气中CO_2浓度在任何地方都是均匀的话，就能通过“浓度”×“气体总体积”计算出“CO_2总含量”。
然而，CO_2的浓度会因位置的不同，而产生差异，这种变化是平滑且连续的。


如此一来，考虑一下，对于“连续变化的浓度”应当如何计算出“总量”。
这个……能说得再简单一点吗？

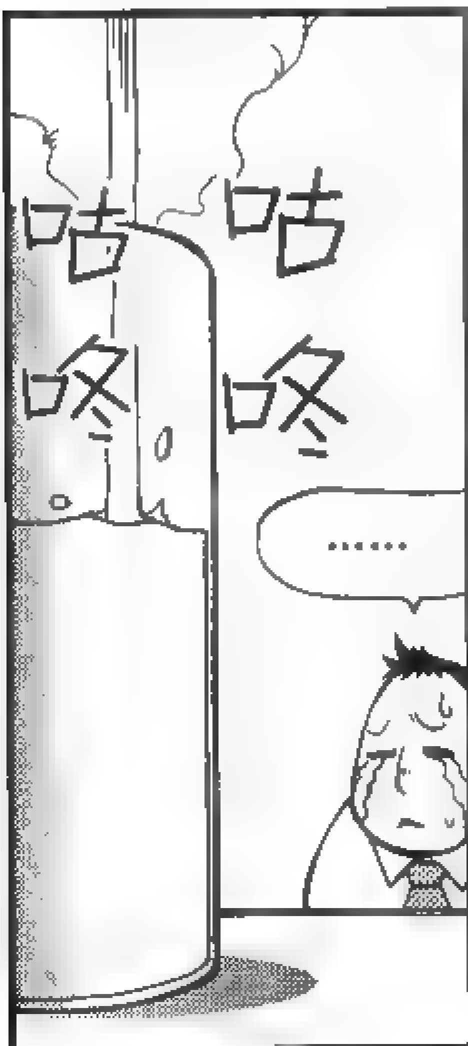

那就用这个！增井的压箱之宝——烧酒！！
啊……怎，怎么可以！？
啊


都是为了引间的学习啊！这总比在单位放着好多了吧！
呜呜~那可是算田镇的特产梦幻烧酒“沉睡千年”啊……
怪不得他总是在睡觉啊！

1 微积分基本定理的形成

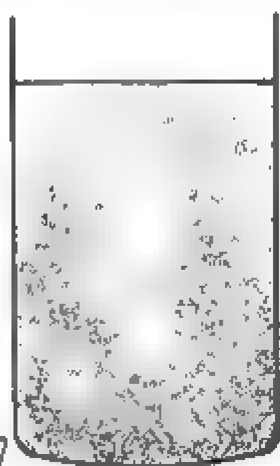


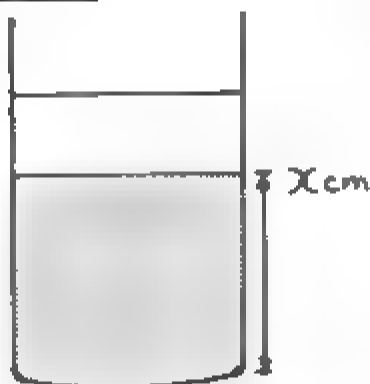




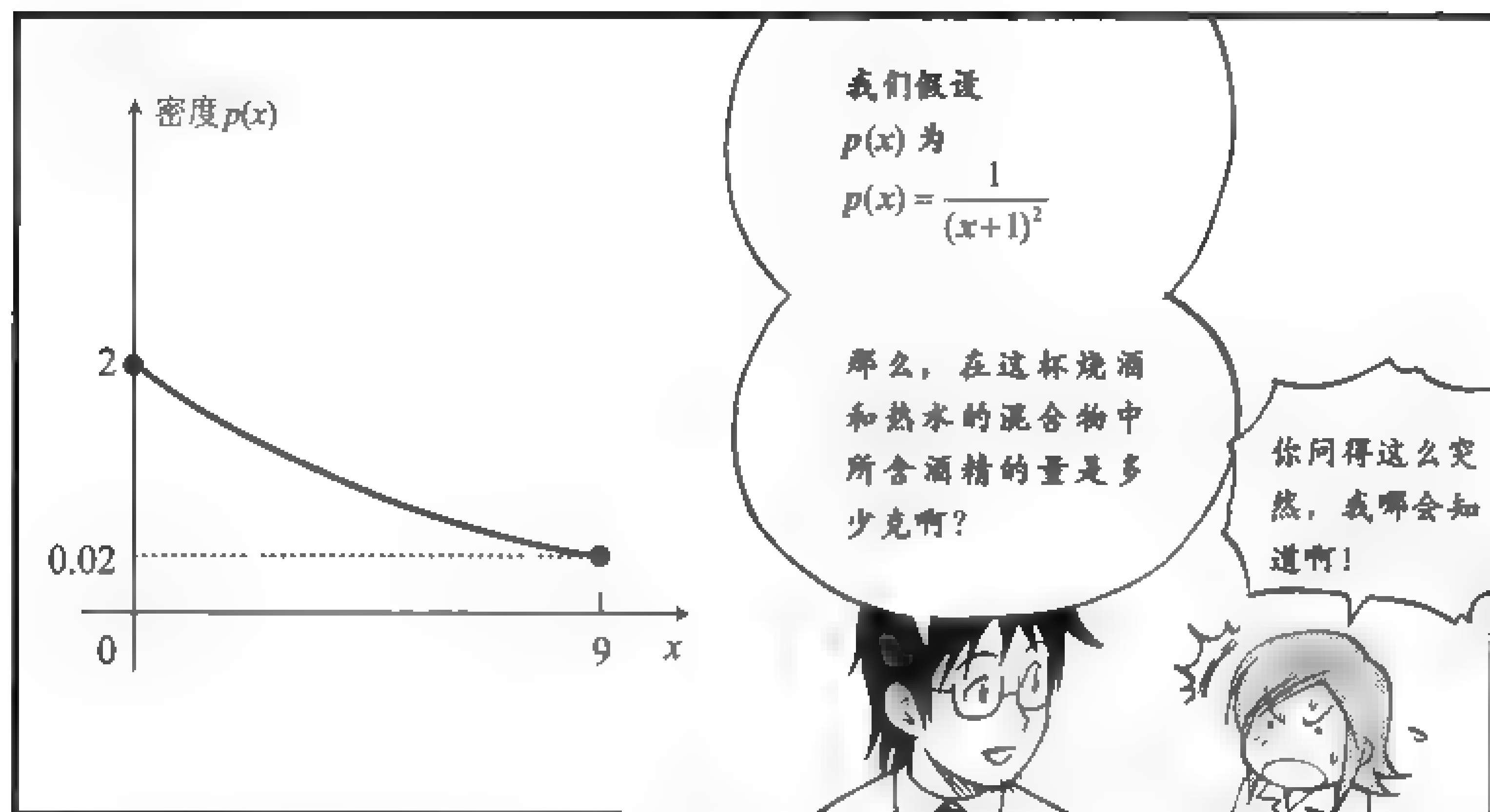
可想而知，底部较浓，而上方是稀薄的烧酒和热水混合在一起。

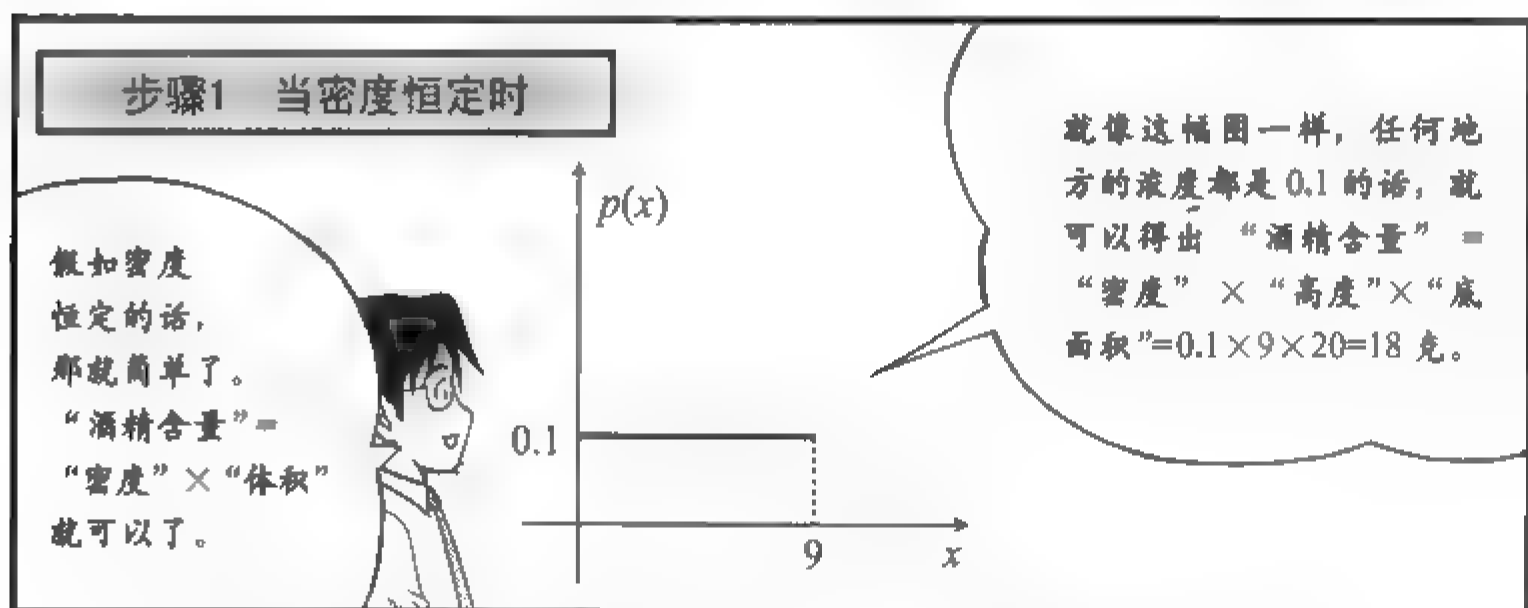
同时，各处的浓度应该是一点一点平滑地变化的。

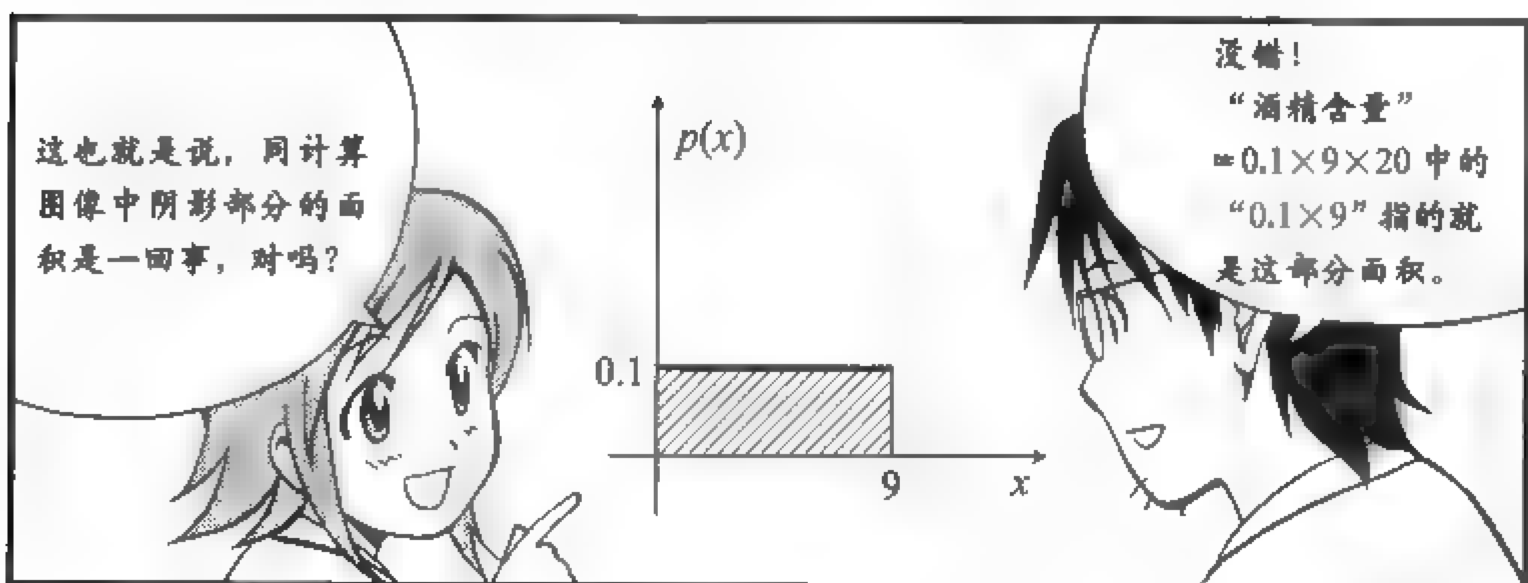




距杯子底部 $x$cm 处的烧酒密度用函数 $p(x)\mathrm{g/cm^3}$ 进行表示。


密度$p(x)$
2
0.02
0
9
x
我们假设
$p(x)$ 为
$p(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$
那么，在这杯烧酒和热水的混合物中所含酒精的量是多少克啊？
你问得这么突然，我哪会知道啊！

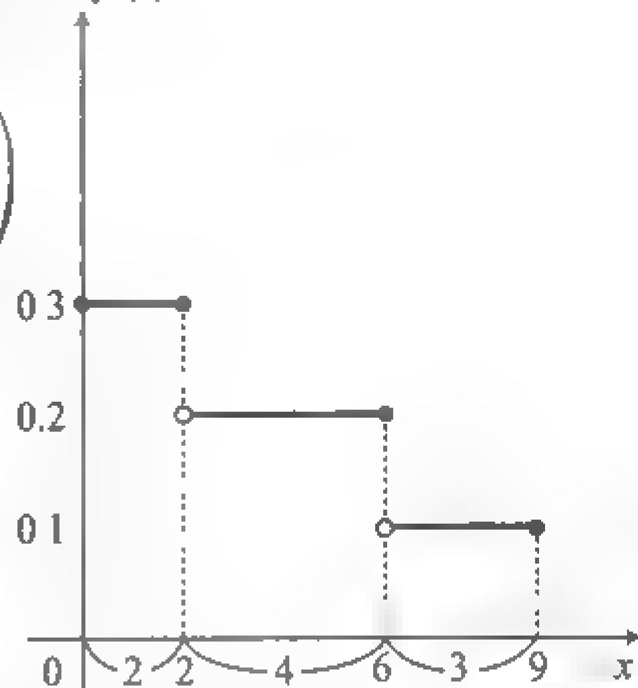

步骤1 当密度恒定时
就像这幅图一样，任何地方的浓度都是0.1的话，就可以得出“酒精含量”=“密度”×“高度”×“底面积”=0.1×9×20=18克。
假如密度恒定的话，那就简单了。“酒精含量”=“密度”×“体积”就可以了。
$p(x)$
0.1
9
x


没错！“酒精含量”=0.1×9×20中的“0.1×9”指的就是这部分面积。
这也就是说，同计算图像中阴影部分的面积是一回事，对吗？
$p(x)$
0.1
9
x

步骤2　当密度呈阶段性变化时

就是说，当密度呈不连续的阶段性变化时，我们也能够进行计算。

比方说，以右边的这幅图为例。



引间小姐，试着算一下吧。

嗯……将每一阶段划分开来……底面积为20cm²……

$$0.3\times2\times20 \quad + \quad 0.2\times4\times20 \quad + \quad 0.1\times3\times20$$

（$0\leqslant x\leqslant2$ 时这部分的酒精含量）（$2<x\leqslant6$ 时这部分的酒精含量）（$6<x\leqslant9$ 时这部分的酒精含量）

$$=(0.3\times2+0.2\times4+0.1\times3)\times20=34$$

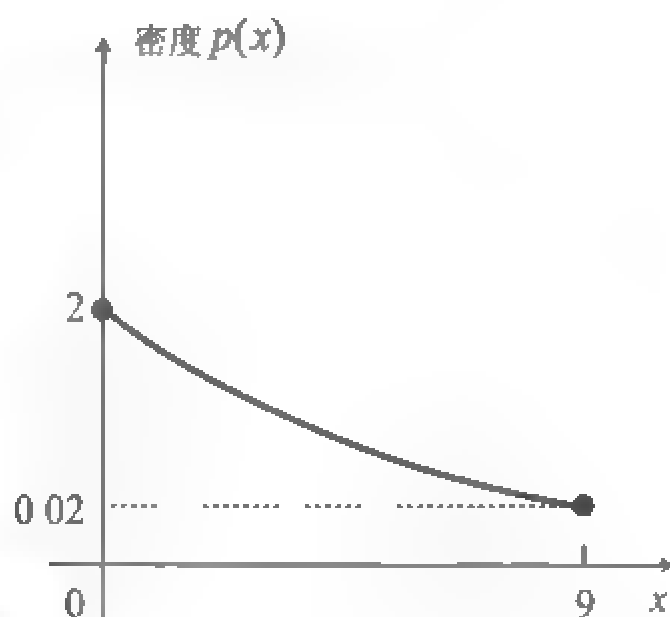
所以……

答案是
34克!!

完全正确!

步骤3　当密度连续变化时

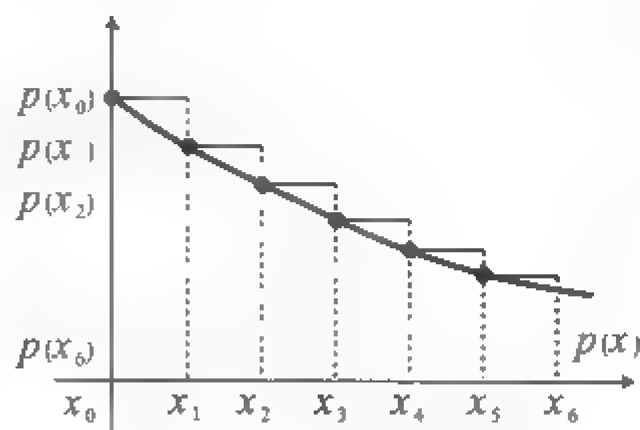
那么，当$p(x)$连续变化时，该怎么做呢？



太麻烦了吧!!

这个一点也不麻烦!

瞧!



我明白了，首先，将它近似成细分的分段函数，然后像步骤2那样进行计算就可以了!

是的！
将x轴分割为
x_0, x , x_2, …, x_6。

在 x_0 和 x_1 之间密度恒定，为 $p(x_0)$，

在 x_1 和 x_2 之间密度恒定，为 $p(x_1)$，

在 x_2 和 x_3 之间密度恒定，为 $p(x_2)$。

以此类推，
使用分段函数
对 $p(x)$ 进行近似计算。

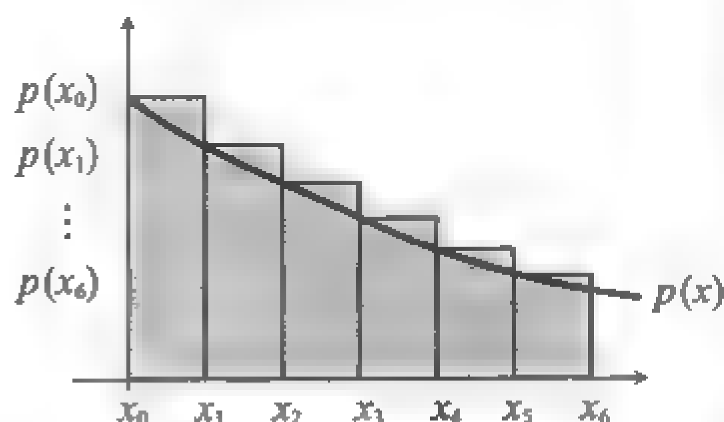
只要用这个分段函数计算出酒精含量，就可以得出“真实酒精含量”的一个近似值。

这就是
运算过程啦！

$$p(x_0)\times(x_1-x_0)\times 20$$
$$p(x_1)\times(x_2-x_1)\times 20$$
$$p(x_2)\times(x_3-x_2)\times 20$$
$$p(x_3)\times(x_4-x_3)\times 20$$
$$p(x_4)\times(x_5-x_4)\times 20$$
$$+)\quad p(x_5)\times(x_6-x_5)\times 20$$

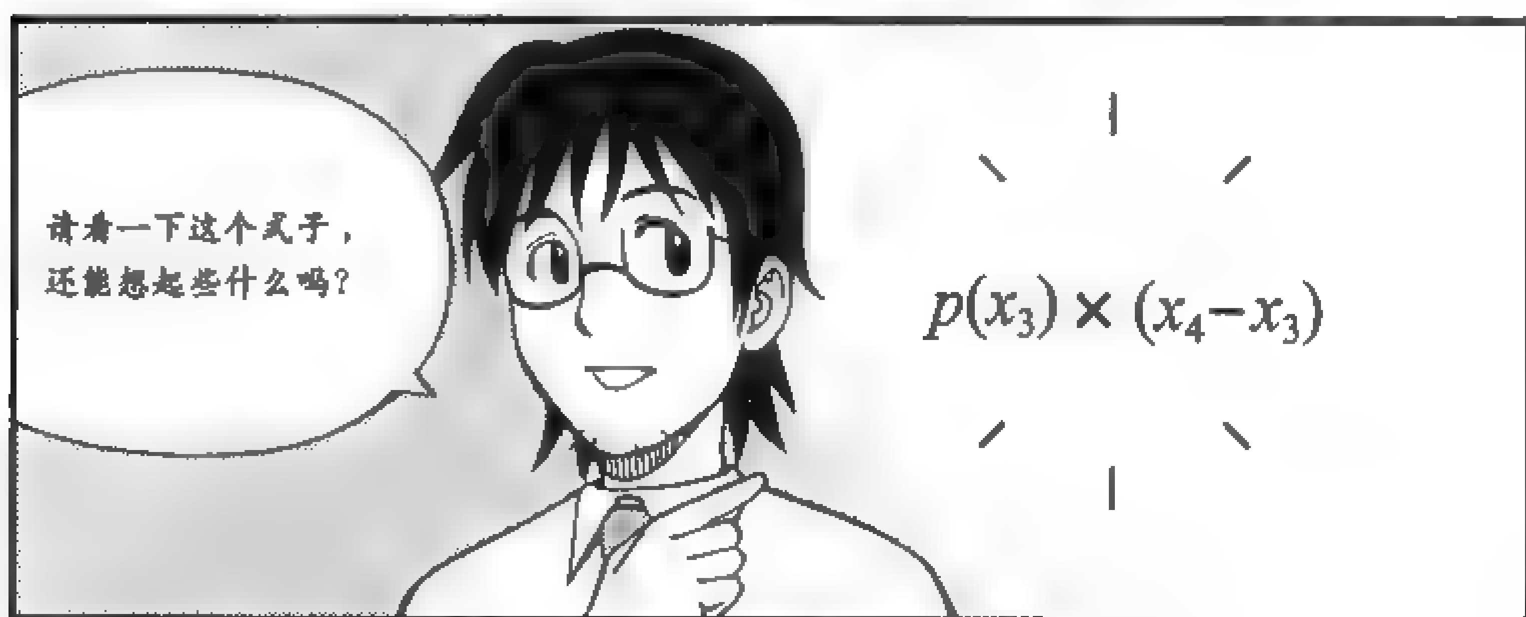
近似的酒精含量

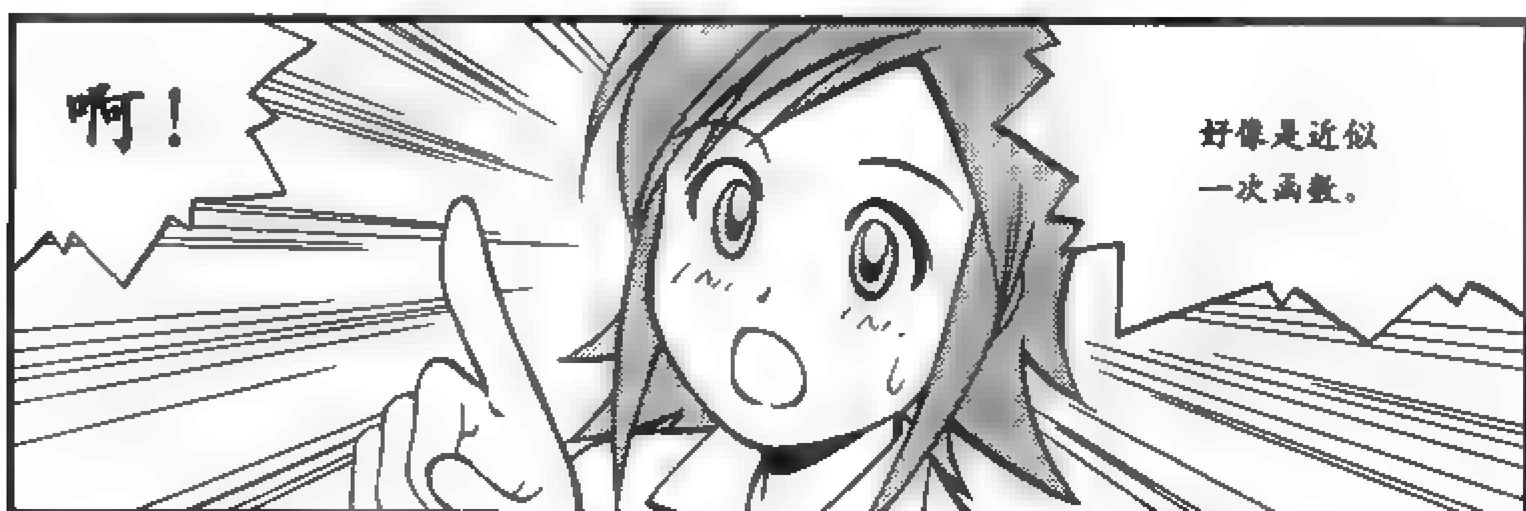
没错！
分段函数图形中阴影部分的面积就是这个式子（不乘以20）的累加之和。




那么，只要将这些小间隔无限细分下去，就应当可以将它看成是“真实酒精含量”。
呃！
话虽如此，
但实际上
并不是那样。


必须对这些无限细小的东西做无限次加法才可以。
是，是啊……


请看一下这个式子，还能想起些什么吗？
$p(x_3)\times(x_4-x_3)$


啊！
好像是近似一次函数。

步骤4 复习近似一次函数

$f(x)$的导函数为$f'(x)$，在$x=a$附近，可以写作

$$f(x) \underset{\text{近似}}{\sim} f'(a)(x-a)+f(a)。$$

将$f(a)$移项，得

$$f(x)-f(a) \underset{\text{近似}}{\sim} f'(a)(x-a) \quad ((f\text{值的差}) \underset{\text{近似}}{\sim} (f\text{的微分}) \times (x\text{的差})) \text{ —— ①}$$

只要x_0，x_1，x_2，x_3，…，x_6之间的间隔足够小，就可以认为x_1在x_0附近，x_2在x_1附近，……依此类推。

这里我们研究一下导函数为$p(x)$的函数$q(x)$。(也就是$q'(x)=p(x)$)

将①使用在$q(x)$上((q值的差) $\underset{\text{近似}}{\sim}$ (q的微分) × (x的差))，可得

$$q(x_1)-q(x_0) \underset{\text{近似}}{\sim} p(x_0)(x_1-x_0)$$

$$q(x_2)-q(x_1) \underset{\text{近似}}{\sim} p(x_1)(x_2-x_1)$$

⋮

我们原本想对右边进行累加，现在这个结果也可以由左边累加后得到了！

整理累加之和的计算式子

$$q(x_1)-q(x_0) \underset{\text{近似}}{\sim} p(x_0)(x_1-x_0)$$

$$q(x_2)-q(x_1) \underset{\text{近似}}{\sim} p(x_1)(x_2-x_1)$$

$$q(x_3)-q(x_2) \underset{\text{近似}}{\sim} p(x_2)(x_3-x_2)$$

$$q(x_4)-q(x_3) \underset{\text{近似}}{\sim} p(x_3)(x_4-x_3)$$

$$q(x_5)-q(x_4) \underset{\text{近似}}{\sim} p(x_4)(x_5-x_4)$$

$$+)\quad q(x_6)-q(x_5) \underset{\text{近似}}{\sim} p(x_5)(x_6-x_5)$$

$$q(x_6)-q(x_0) \underset{\text{近似}}{\sim} \text{累加之和}$$

因为，$x_6=9$，$x_0=0$，所以

近似酒精含量=累加之和×20

$=(q(x_6)-q(x_0))\times 20$

$=(q(9)-q(0))\times 20$



步骤5　近似→实际值

现在，我们得到如下框图，整理一下吧！

近似的酒精含量(÷20)

$p(x_0)(x_1-x_0)+p(x_1)(x_2-x_1)+\cdots$

(B) ＝ (近似)

$q(9)-q(0)$

(恒定)

(A) ‖ 近似

实际的酒精含量(÷20)

此处，$x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots$ 这样的点逐渐增多，直至无限个。

这时，(A)就不再是“近似”而可以将其看作为是“等号”。

然而，我们一直在近似 $q(9)-q(0)$ 这样的恒定值。

对于无限个 x_i，求 $p(x_i)(x_{i+1}-x_i)$ 之和

＝ $q(9)-q(0)$

真实的酒精含量（÷20）

就可以得到以上关系[1]！

1. 第94页中有更为准确的解法。

步骤6 $p(x)$是$q(x)$的导函数



设$q(x)=-\dfrac{2}{x+1}$，于是

$$q'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}=p(x)$$

※ $p(x)$是$q(x)$的导函数

$q(x)$称为$p(x)$的原函数



$$(\text{酒精含量})=\{q(9)-q(0)\}\times 20$$

$$=\left\{-\frac{2}{9+1}-\left(-\frac{2}{0+1}\right)\right\}\times 20$$

$$=36\text{克}$$







2 微积分的基本定理

$$p(x_0)(x_1-x_0)+p(x_1)(x_2-x_1)+\cdots+p(x_5)(x_6-x_5) \quad ——②$$

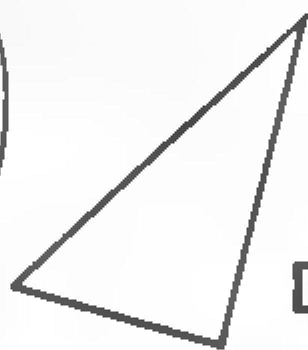
这个式子……

$$\sum_{x=0,x_1,\cdots,9} p(x)\Delta x$$

也可以这样写。

哇——好简洁啊！

但是，那个Δ是什么啊？



Δ(Delta)是希腊字母，我们使用这个符号来表示变化量。

这个Δx表示的是“到下一个点间的距离”就是(x_1-x_0)，(x_2-x_1)这样的式子。



这个$\sum$ (Sigma) 正是将式子简化的窍门。例如，

$$\sum_{x=x_0, x_1, \ldots, x_6},$$

就表示执行“从$x_0=0$到$x_6=9$逐一累加求总和”的命令。

那么，

$$\sum_{x=x_0, x_1, \ldots, x_6} p(x)\Delta x$$

是什么意思啊？

就是求(x处的$p(x)$的值)×(从x到下一点间的距离)累加后的总和吧。

没错！这正是之前出现的②式的含义。

接下来，再教你一个可以将②式简单表达出来的符号。

②式是“对有限个阶段累加求和”，因此，当这些阶段被无限地细分的时，只要将符号弄得“圆滑”些就可以了。

圆滑？

是的把它……



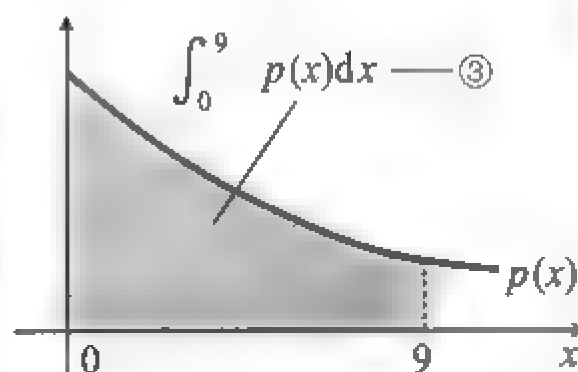
$$\sum p(x)\Delta x \rightarrow \int_0^9 p(x)\Delta x \rightarrow \int_0^9 p(x)dx$$

把∑拉长变成∫。

哎哟

把Δ改换成d。

哦！



这个③式就表示无限细分之后的累加之和，其所表示的含义是左图中曲线和x轴之间所夹的面积。

我们将其称为定积分※。

只要知道$p(x)$是$q(x)$的导函数，

就能够按照

$$\int_a^b p(x)\mathrm{d}x = q(b) - q(a) \quad ——④$$

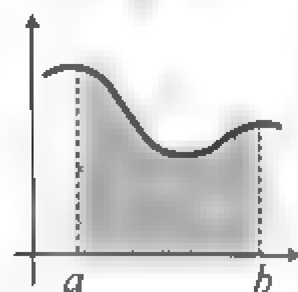
进行计算，这不就很简单了吗？

定积分真是太伟大了!!

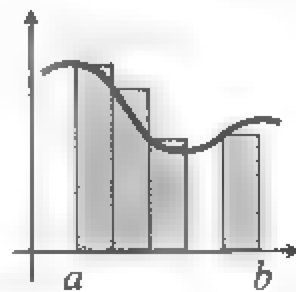
……

没听懂

小结



$$p(x) = \int_a^b p(x)\mathrm{d}x \underset{近似}{\sim} \sum_{x=x_0,x_1,\cdots,x_n} p(x)\Delta x$$



↓

只要能找出满足$q'(x) = p(x)$的$q(x)$

↓

$= q(b) - q(a)$

这就是“微积分的基本定理”啦！

※ 定积分：Numerical integration。

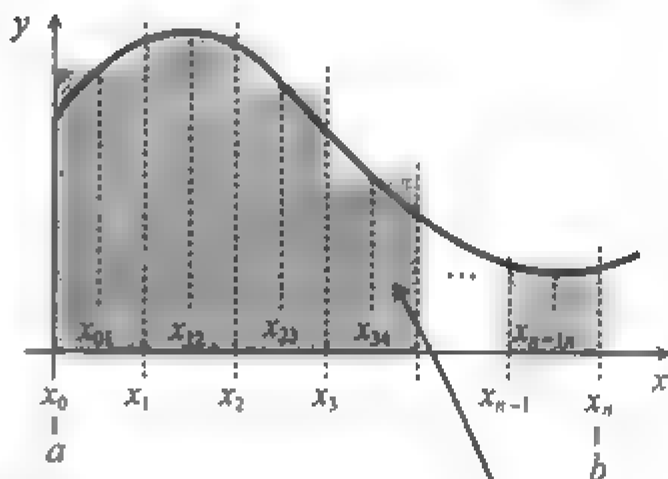
- **步骤5(第89页)详解**

在之前的说明过程中，我们以 $q(x_1)-q(x_0)\underset{\text{近似}}{\sim}p(x_0)(x_1-x_0)$，这样一个“刚好合适”的式子，即一个“大概推测出的近似的式子”为基础进行了讲解。为了那些按部就班、无法确信这一式子的人，这里我们再严格地推导一下。只要我们使用“平均值定理”，就算不使用“$\underset{\text{近似}}{\sim}$”这个怪异的符号，也能得到同样的结果。



先找出满足 $q'(x)=p(x)$ 的 $q(x)$，存在点

$$\underset{a}{x_0}, x_1, x_2, x_3, \cdots, \underset{b}{x_n}。$$



在 x_0 和 x_1 之间，找出点 x_{01}，使其满足

$$q(x_1)-q(x_0)=q'(x_{01})(x_1-x_0)。$$

由“平均值定理”可知，这样的点是一定存在的。

同理，在 x_1 和 x_2 之间，找出点 x_{12}，

$$q(x_2)-q(x_1)=q'(x_{12})(x_2-x_1)$$

这些阶段的面积

依此类推

$$
\begin{aligned}
q(x_1)-q(x_0) &= q'(x_{01})(x_1-x_0) = p(x_{01})(x_1-x_0)\\
q(x_2)-q(x_1) &= q'(x_{12})(x_2-x_1) = p(x_{12})(x_2-x_1)\\
q(x_3)-q(x_2) &= q'(x_{23})(x_3-x_2) = p(x_{23})(x_3-x_2)\\
&\vdots\\
q(x_n)-q(x_{n-1}) &= q'(x_{n-1n})(x_n-x_{n-1}) = p(x_{n-1n})(x_n-x_{n-1})
\end{aligned}
$$

累加求和

+)

$q(x_n)-q(x_0)$ ← 恒等于 → 近似面积

$\|$

$q(b)-q(a)$

↓ 进行无限细分

$q(b)-q(a)$ ← 等于 → 真实面积



3 积分公式

公式 3-1 | 积分公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x \quad \text{——(1)}$$

（对于同一函数的定积分来说，积分区间可以进行接续。）

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad \text{——(2)}$$

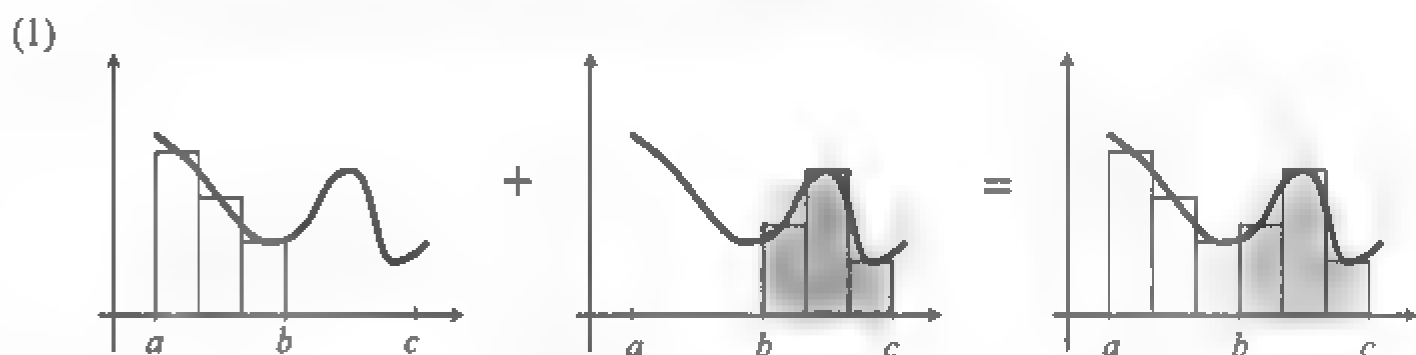
（和的定积分，可以分开写成定积分的和。）

$$\int_a^b \alpha f(x)\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{——(3)}$$

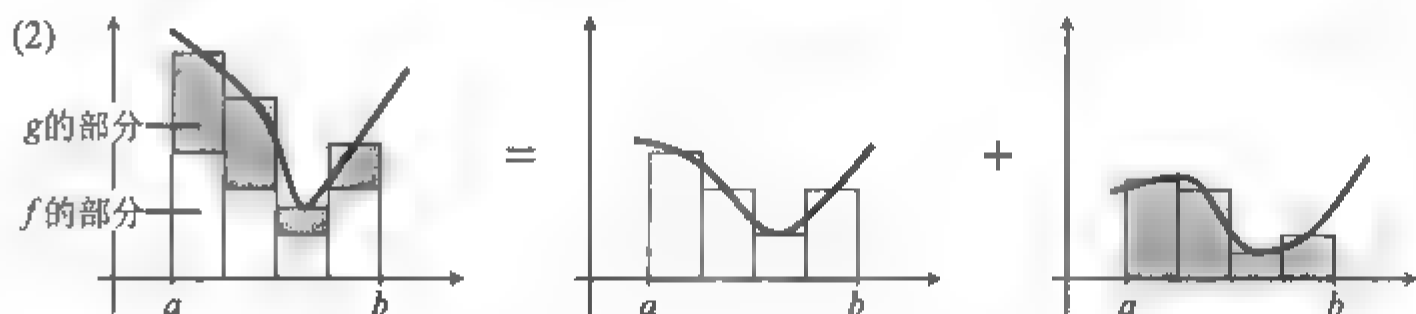
（常数倍函数的定积分，等于定积分之后再乘以常数倍。）

(1)~(3)所画的是近似分段函数的图形，看了自然就会明白。

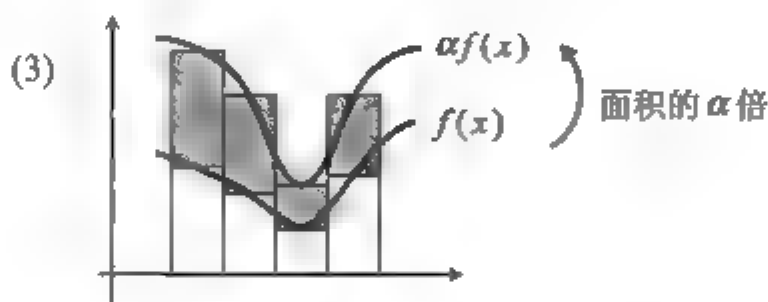
(1)

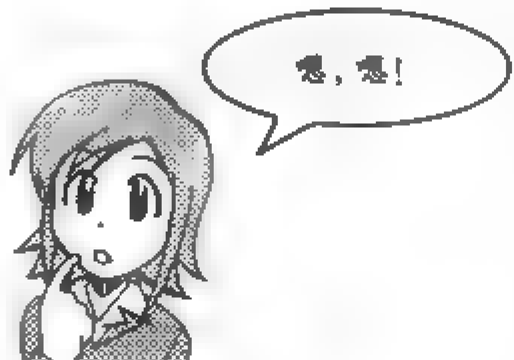


(2)

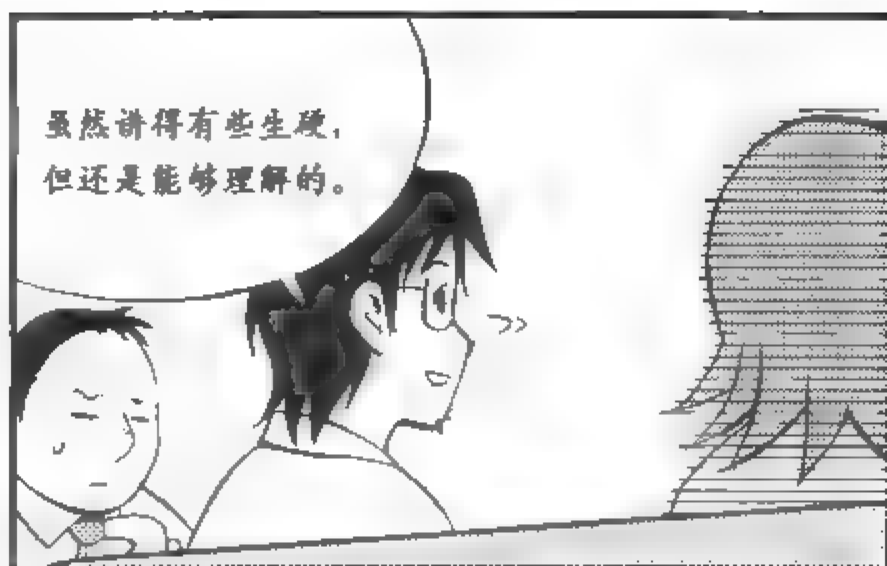


(3)



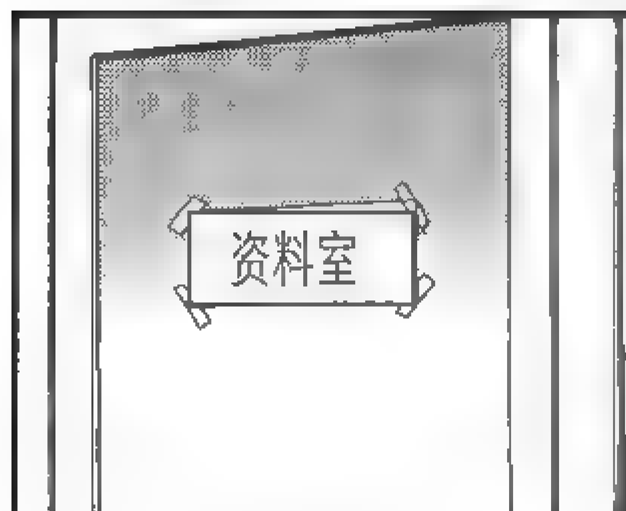


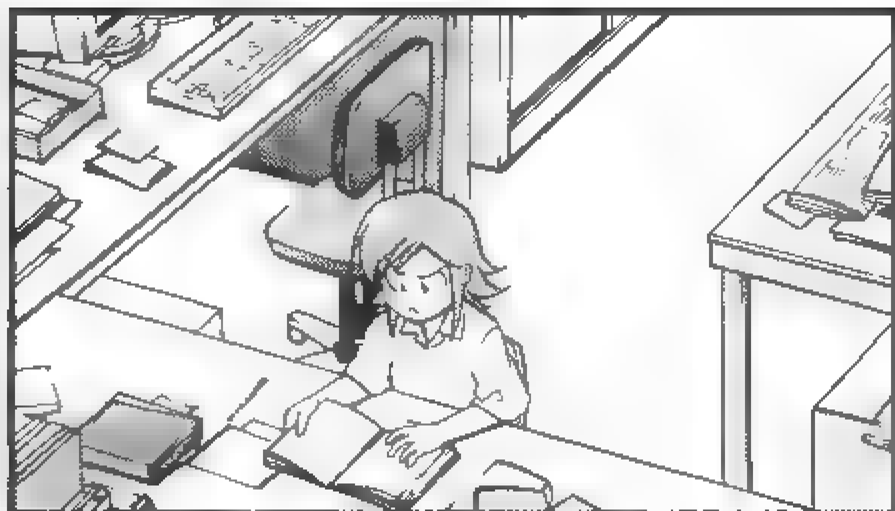

哎呀
终于搞定了！
喂，堵井
别多想了，
快喝了吧！
这本来就是我的酒！


虽然讲得有些生硬，
但还是能够理解的。


杀气！！
糟、糟糕！
陶醉


还是请你去资料室，想一想该做的事情吧！
资料室
拖
拖
拖


资料室




好吧
哼！
就把我像
外人一样
对待！
引间小姐，我记得大约1年前，算田理工大学也有将风的流通路径分析纳入大厦设计的研究小组。
能否请你确认一下，他们其后的研究进展呢？
哼
哼

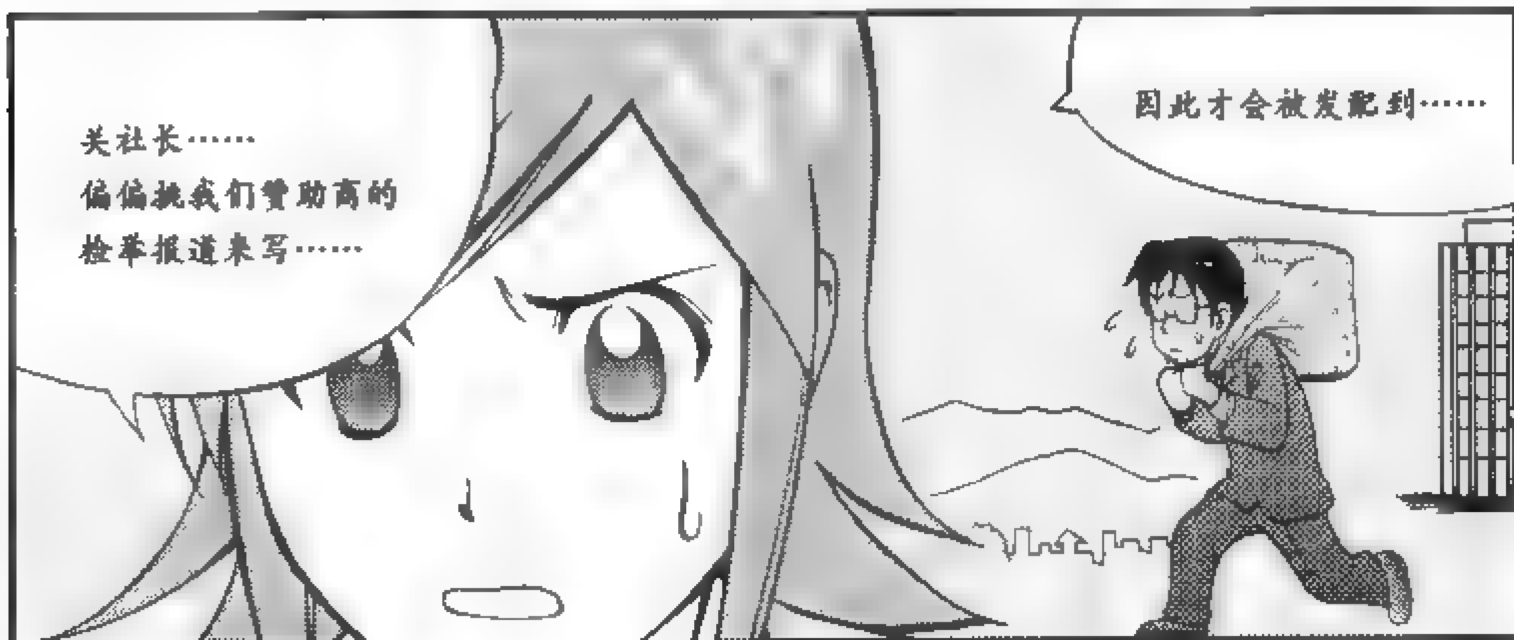

嗯！？
关
撰稿


关……
撰稿！
这是关社长曾经撰写的报道！？
他会写
什么样的
报道呢……

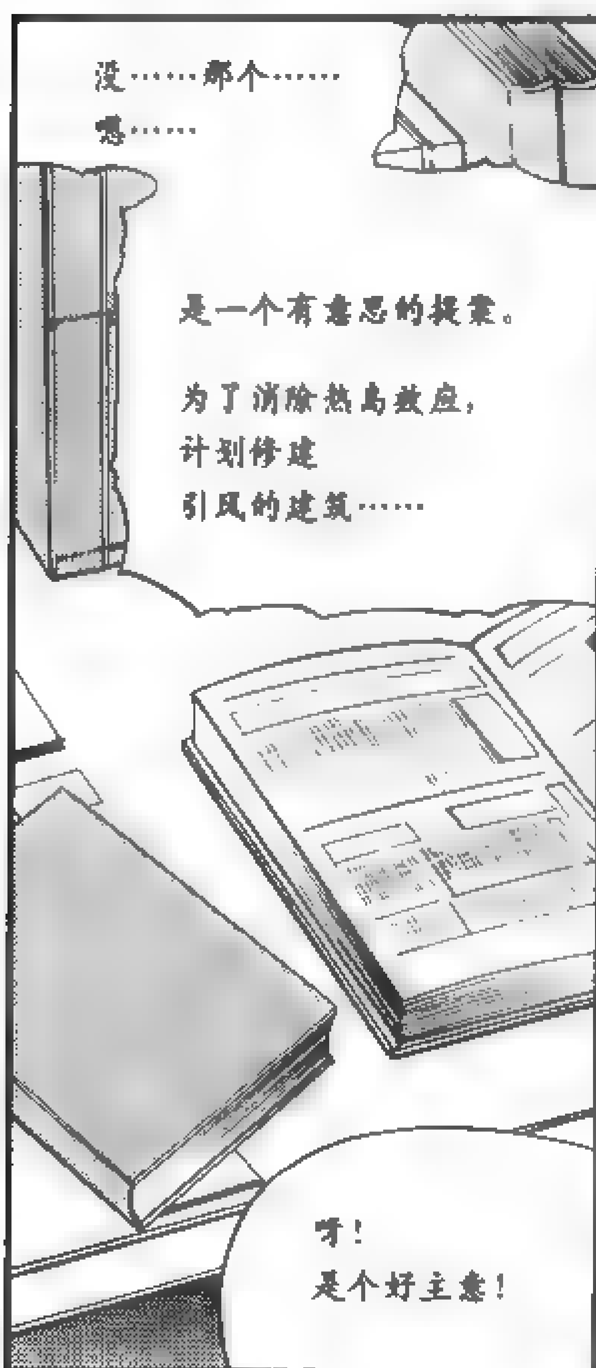
○×湾污染扩大

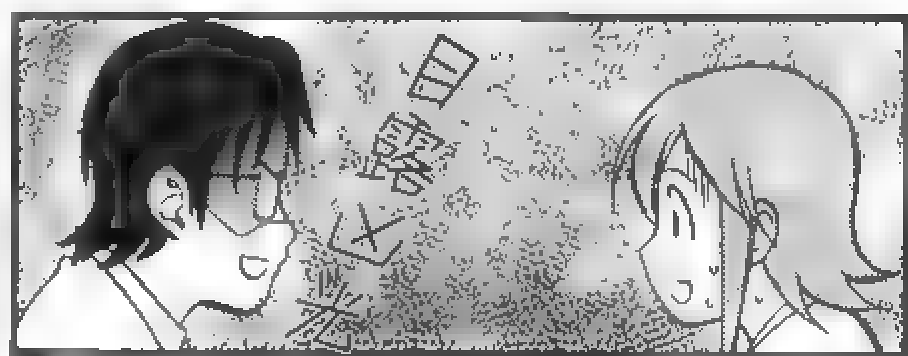
K企业废弃物是元凶






发现
什么了？
开门

啊！

没……那个……
嗯……
是一个有意思的提案。
为了消除热岛效应，
计划修建
引风的建筑……
呀！
是个好主意！

那，是怎样的
建筑呢？
呃……

目露凶光

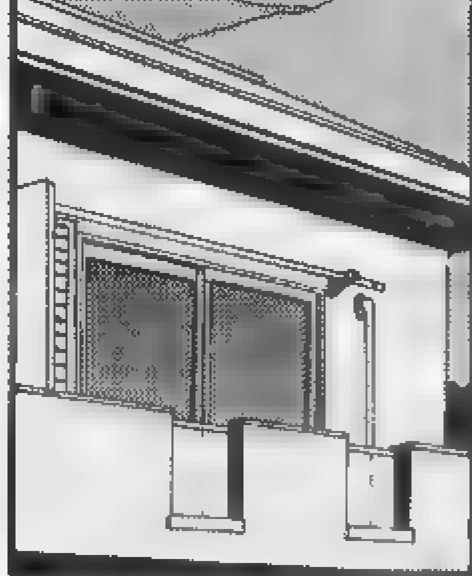
那、那个……
现在就打电话
去问一下，马上……
电话？
暴怒



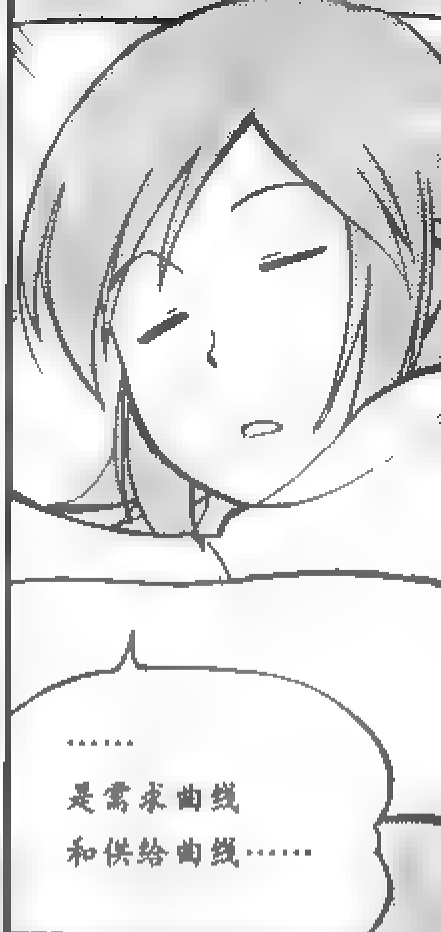
再罚你用数学式子写出
他们的理论依据。

是!
我这就去
……

4 基本定理的应用举例






……
是需求曲线
和供给曲线……


在经济学中，
需求曲线和
供给曲线……
这两条曲线的交点
决定了交易的价格
和数量。


这是常识啊！
这并不只是意味着
那一点仅仅决定了
交易活动。


实际上，按照这一点
进行交易，还可以使
社会达到最优化
哇——
真厉害啊！


微积报社
嗯。使用微积分的基
本定理，就能简单地
理解这一点了。

供给曲线

首先，考虑一下，在完全竞争市场中企业的最大利润。



设生产x件商品的费用为$C(x)$，则利润为$\Pi(x)$：

$$\Pi(x) \quad p \quad x \quad C(x)$$

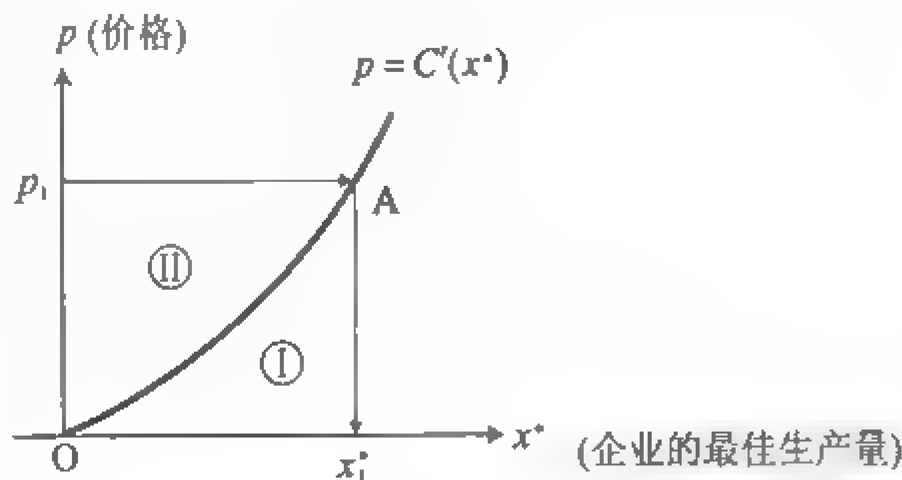
$$(\text{利润}) = (\text{价格}) \times (\text{生产量}) - (\text{费用}) = px - C(x)$$

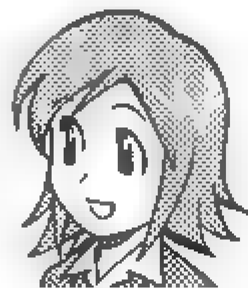
在此，设利润$\Pi(x)$达到最大时的x为x^*，

于是有，$\Pi(x)$在x^*处的微分为$\Pi'(x^*) = 0$，

所以，$\Pi'(x^*) = p - C'(x^*) = 0$。

我们将这个$p = C'(x^*)$称为供给曲线。





当价格为p_1时，则可以根据$p_1 \to A \to x_1^*$，由此决定企业的最佳生产量。

此时，长方形 $Op_1Ax_1^*$ 的面积就相当于(价格)×(生产量)。

Ⓘ 的面积，可以通过积分得出。

$$\int_0^{x^*} C'(x^*)\,dx^* = C(x_1^*) - C(0) = C(x_1^*) = (\text{费用})$$

此处使用了基本定理　　简单起见，令 $C(0)=0$

因此可知，利润 $\Pi(x_1^*)$ 就是 Ⓘⓘ 的面积((长方形的面积)－(Ⓘ 的面积))。

需求曲线

接下来，再考虑一下，消费者所获得的最大利益。

当消费者消费 x 件商品时，设其所获得的实际价值为 $u(x)$，则消费者的利益 $R(x)$ 为

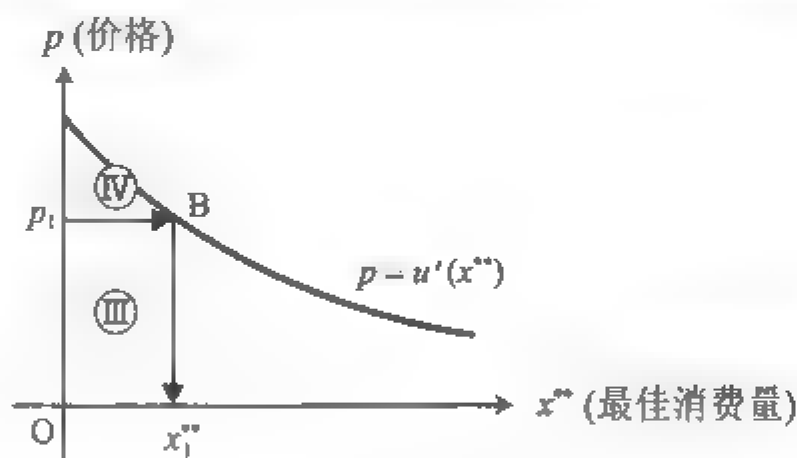
$$R(x) = (\text{消费的价值}) - (\text{所支付的金额}) = u(x) - px$$

在这个 $R(x)$ 达到最大的时候，这种商品的消费量也就达到了最大值。

此时，消费量为 x^{**}，由于 $R(x)$ 在 x^{**} 处的微分值为0，所以

(由于“微分=0”) $R'(x^{**}) = u'(x^{**}) - p = 0$





然后，再观察一下长方形 $Op_1Bx_1^{**}$ 的面积。

长方形 $Op_1Bx_1^{**}$ 的面积就相当于(价格)×(消费量)。

因此，Ⅲ 的面积(长方形 $Op_1Bx_1^{**}$)就相当于所支付的金额。

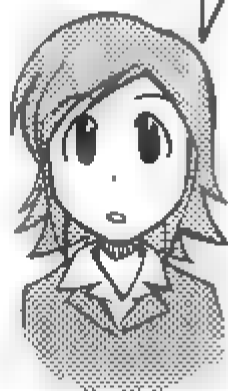
Ⅲ+Ⅳ 的面积，可以通过积分求得。

$$\int_0^{x_1^{**}} u'(x^{**})\,dx^{**} = u(x_1^{**}) - u(0) = u(x_1^{**})$$

简单起见，令 $u(0)=0$

= 消费的总价值

由此可知，Ⅳ 表示消费者的利益。

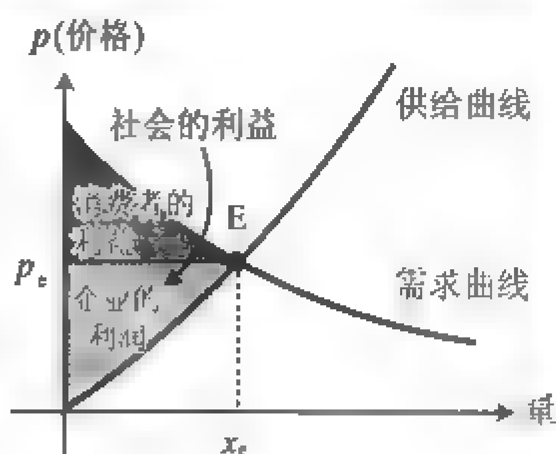




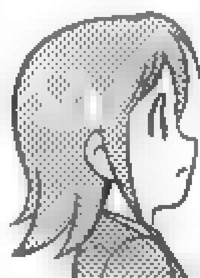
如右图所示，我们认定
利润+消费者的利益=社会的利益。

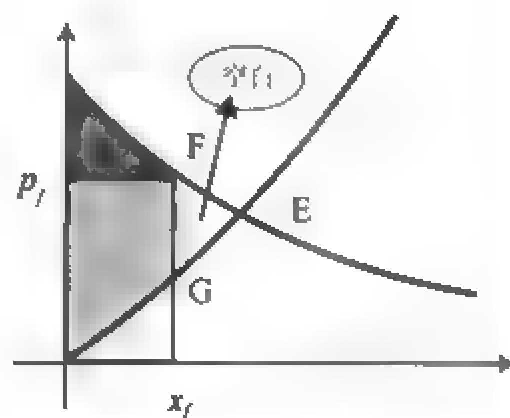


如果不在交点处进行交易，
会发生什么情况呢？



右图就会有空白的地方，
社会的利益变少了。











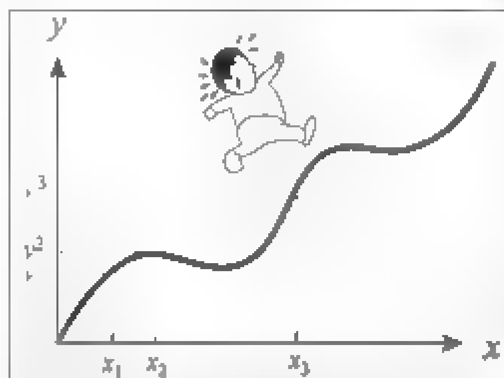
大风也不怕/大雨也不怕 微分啦 积分啦/都不怕
头脑清晰 思路清晰/数学式子 玩一样
社会问题，要冷静 切勿乱加，个人感情
打破砂锅问到底/就要解开所有的谜
微积分之歌……

微积分报

200○年
□月□日第006号
微积分报 The Bisek Shinbun
发行人 引间景子
微积分报编辑部 冀田镇大学大医学小医下

速度的积分就是距离

速度的积分=位置的差=移动的距离。只要理解了这个公式，那些关于变速运动的计算问题，就能够迎刃而解了……真的会是这样吗？下面由本报寄予厚望的新人、引间记者为您揭开真相。



大汗淋漓的增井在y轴上迂迂回回，在x_1、x_2、x_3……时刻，分别上移……

式1　$y=F(x)$

式2　$\int_a^b v(x)\,dx=F(b)-F(a)$

这个问题，可能有的人一听就明白了，而有的人暂时还不能理解。本报曾有个关于电梯的例子，当时增井记者汗流浃背地为我们进行说明。读者朋友可能会回想起距离的微分就是速度，以及增井挥汗如雨的身影。这个爱出汗的增井偶尔还是能派上用场的。

那么，在 y 轴上移动的大汗淋漓的增井，x 秒后的位置可以用左图中的式1进行表示。

这个式1的导函数就是 x 秒后的“瞬时速度”。速度在英语中写作 Velocity，为了便于理解我们用 v 将 $F'(x)$ 记作 $v(x)$，于是就可以得到如式2所示的微积分的基本定理。

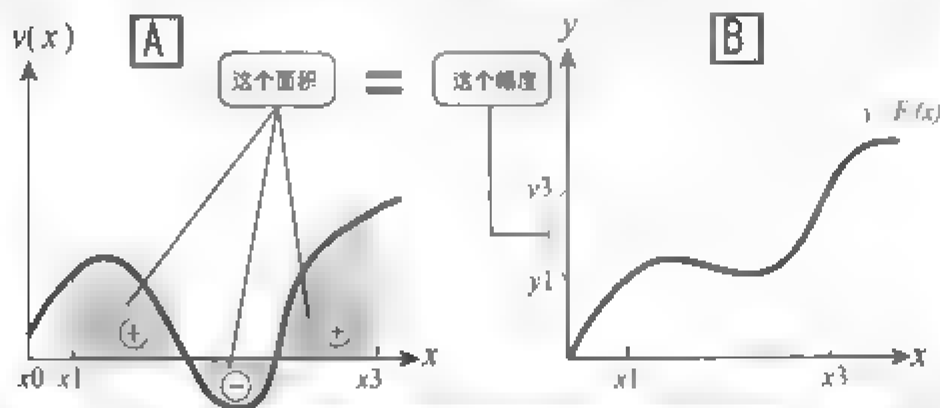


图1

速度的积分=位置的差

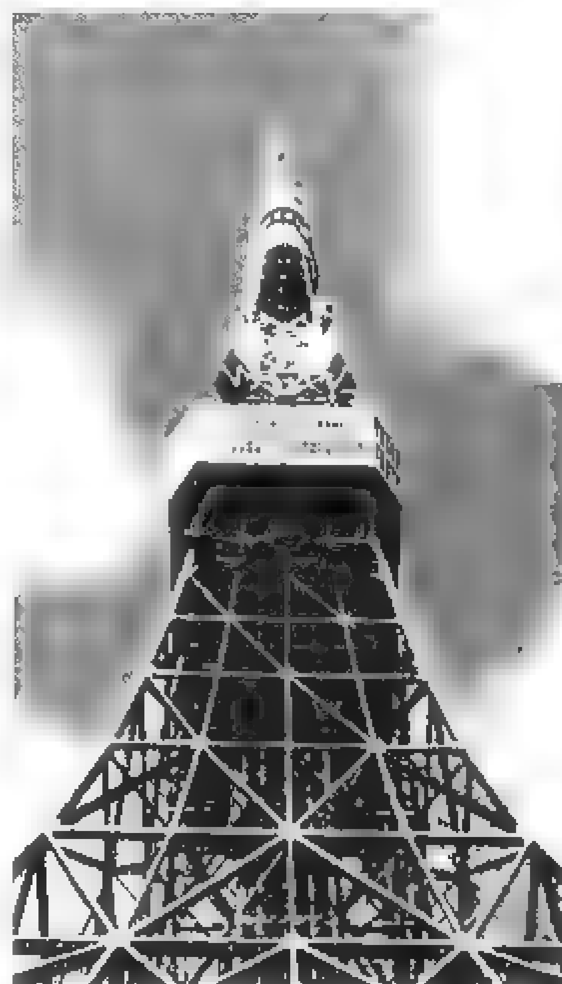
真相很快就要水落石出了。如果要将式2中的 $v(x)$ 用图像表示出来，就会得到图1中的[A]。图上的阴影部分就是速度的面积。

把式1画成图像，就可以得到图1中的[B]。在 y 轴上挥汗如雨的增井所移动的距离（即位置的差），综合[A]和[B]一起观察，就会得出真相！

速度的积分等于位置的差

理解了这一公式的记者，就能够顺利地解答关于变速运动的计算问题。比方说，公共汽车，嗯，还可以是……

从东京塔落下的物体几秒后着地?



当我们再一次凝视理所当然的事情……这是近来对微积分有所领悟的记者的新境界。世间总有一些理所当然的事情。然而，在其背后必定隐藏了某些规律，因此才使它们成为理所当然的事情。例如，手中的物体一但脱离，便会下落。此时，可以将其称为速度是时刻变化的变速运动。那么，它就是一种完全遵循微积分公式的运动。

前面铺陈了这么多，作为学过微积分的人，那些有了些自信的记者心中会涌现出这样一道题。

“从东京塔下落的物体，要经过几秒后到达地面？”

“那就去东京塔扔一个物体试试就行了！”增井二话不说就想去考察一番。走吧，Let's go!

我们都知道，由于重力加速度(注1)的原因，物体在下落的过程中速度会逐渐增加。也就是说，每1秒会增加9.8m。这是由谁规定的呢？谁都不是，是地球的重力使然。那么，在T秒间，物体所下降距离就可以通过右侧的式1进行表示。

注1　重力加速度9.8m/s

式1　$F(T)-F(0)=\int_0^T v(x)\,dx=\int_0^T 9.8x\,dx$

由于速度的积分等于位置的差也就是移动的距离，参考左侧的图1和图2，便可推导出式2。东京塔的高度为333米，所以式2中T秒间所下降的距离就为333米，这样能够计算了。于是，

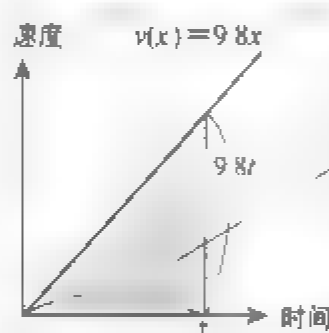


图1

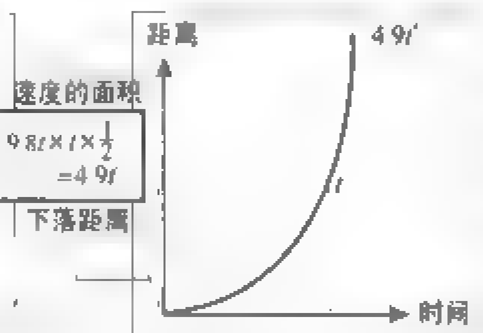


图2

式2　T秒间下落的距离$=4.9T^2-4.9\times 0^2=4.9T^2$

$$333=4.9T^2 \longrightarrow T=\sqrt{\frac{333}{4.9}}=\text{约}8.2$$

将333除以4.9，之后再取平方根，就是答案了！这样，计算结果约为8.2秒。也就是说物体自东京塔的顶端向底部下落，需要花费约8.2秒才能到达地面(前提条件是忽略空气的阻力)!

答案是约8.2秒。

掷骰子也有学问!!

基本定理

讲一讲概率中的密度函数和分布函数

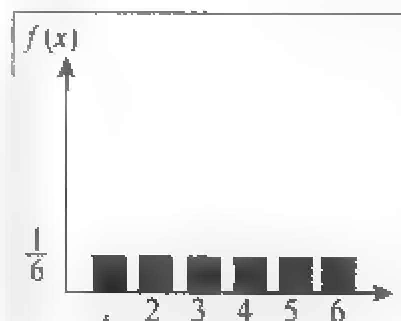


图1　密度函数

式1　$f(x)$（骰子点数为x时的概率）

式2　$f(4)=\frac{1}{6}$（点数为4的概率）

骰子又叫色子。各位读者，您会想起什么呢？也许会想起儿时玩"双六"时所使用的器具。自古以来，这个六面体便被世人使用，它不仅在游戏中，而且还在占卜、赌博等诸多领域，向我们展示它的"点数"。从数学上来讲，它可以说是世界上最小的随机数发生装置了。要说这骰子，还真是奇妙啊！不仅如此，骰子也能掷出微积分的"点数"。骰子上的点数为1，2，3，4，5，6，这些值会随机出现。掷出骰子后，出现某一特定值的概率是$\frac{1}{6}$。将其用柱状图表示出来。

以横轴来表示所出现的点数，以纵轴来表示出现某个点数的概率。这种情况下，出现任何点数的概率都是相同的，正如图1所示。

将其写成式子后，就会得到式1（$f(x)$=点数为x时的概率），例如，式2所表示的是点数4出现的概率。

请看图2，其所表示的含义就是骰子点数的分布函数。请仔细观察一下。首先，来关注横轴上1的附近。小于1的点数不存在，因此这一部分的概率为0。然后，在正好等于1的时候，概率一跃成为$\frac{1}{6}$，就是说在1以上，2以下的概率为$\frac{1}{6}$。此后，在正好为2的时候，概率再次发生跃变成为$\frac{2}{6}$。这就表示出现2及其以下点数的概率为$\frac{2}{6}$。进一步讲，它同与数小于3的概率是相同的。因此，点数小于3的概率为$\frac{2}{6}$。然而，说起小于3时骰子的点数，也只不过是1和2而已。同理可知，出现6及其以下点数的概率，也就是骰子出现点数的概率是1。骰子是不可能以它的棱角来平稳站立的。

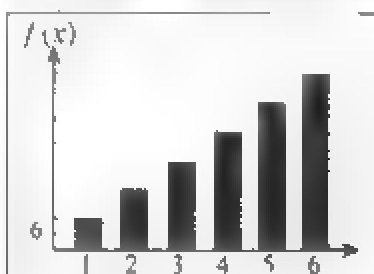


图2　分布函数

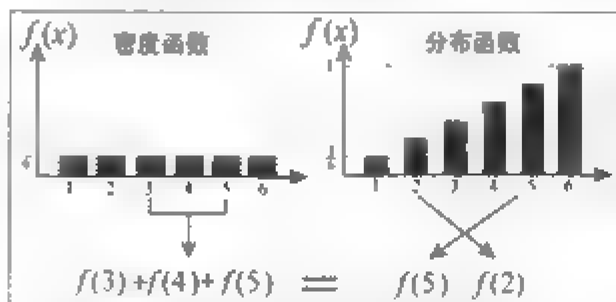


图3　分布函数$F(x)$的微分=密度函数$f(x)$

骰子的点数大于2小于等于5的情况，可以使用图1和图2同时进行观察。于是就能够说明图3中的式子。本来骰子不过只有6个点数，但是将它无限细分变得连续以后，就能推导出式3了。这不正和我们所讲的微积分的基本定理道理相同吗！（微分后的函数的积分）=（原函数的差）。胡乱掷出的骰子，其所出现的点数上竟然隐藏着微积分的规律。真是厉害啊！太喜欢骰子了！

$f(x)$=密度函数

$F(x)$　分布函数

满足$a\leqslant x\leqslant b$的数值x出现的概率

||

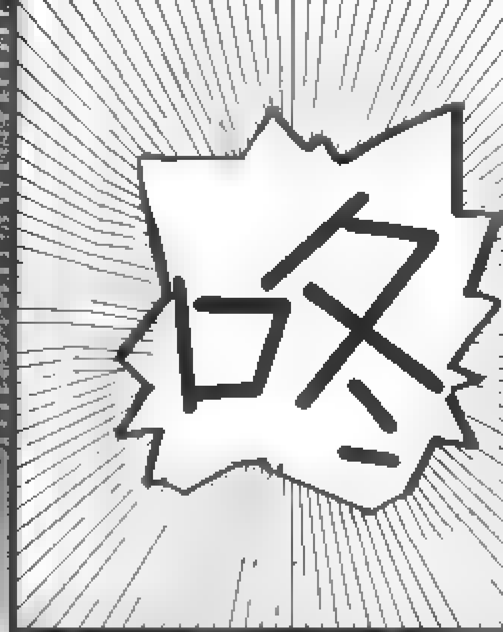
式3　$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

（微分后的函数的积分）=（原函数的差）



微积分的基本定理


啪哒
啪哒
采访
采访

惊
有呀？
咻
有呀？

咚

原来……
是个梦……

喔？

什么!?
啊
离集合时间还有
15分钟啦!!

算田镇夏收节大会的
采访……
关……社长!
我马上就到!

5 微积分的基本定理的验证

当$F(x)$的导函数为$f(x)$时，即，如果$F'(x)=f(x)$成立，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a) \qquad —— (1)$$

或者也可以说

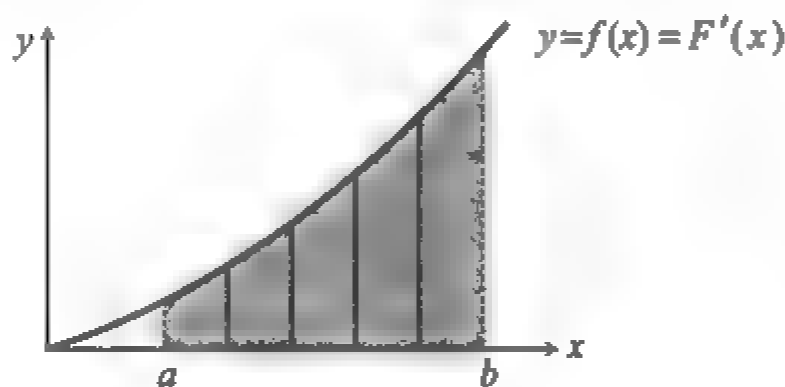
$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a) \qquad —— (2)$$

这个就意味着式(1)、式(2)可以表示为

$\int_a^b$(微分后的函数)dx=(原函数由b到a之间的差)

用图形表示就是

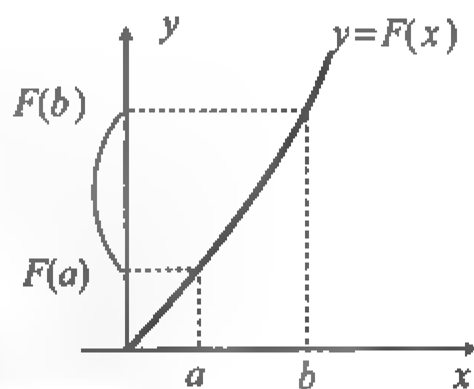
(微分后的函数同x轴以及直线$x=a$、$x=b$所围成的(阴影部分)面积)=(原函数由a到b之间的差)



微积分的基本定理 ↘

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

⇐ 原函数的差



换元积分[1]公式

将变量 x 替换为一个关于变量 y 的函数，即 $x=g(y)$ 时，对于 $f(x)$ 的定积分 $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值，要如何表示成关于 y 的定积分呢？

首先，对定积分进行分段近似。

$$S\sim\sum_{k=0,1,2,\cdots,n-1} f(x_k)(x_{k+1}-x_k)\quad (x_0=a,x_n=b)$$

然后，再进行 $x=g(y)$ 的变量代换，于是，有

$$a=g(\alpha),x_1=g(y_1),x_2=g(y_2),\cdots,b=g(\beta),$$

假设 $y_0=\alpha,y_1,y_2,\cdots,y_n=\beta$。

此时，将 $g(y)$ 近似一次函数，请注意，我们可以得到

$$x_{k+1}-x_k=g(y_{k+1})-g(y_k)\sim g'(y_k)(y_{k+1}-y_k)。$$

将这些代入后，可以得到

$$S\sim\sum_{k=0,1,2,\cdots,n-1} f(x_k)(x_{k+1}-x_k)\sim\sum_{k=0,1,2,\cdots,n-1} f(g(y_k))g'(y_k)(y_{k+1}-y_k)$$

最后这个式子，就是对 $\int_\alpha^\beta f(g(y))g'(y)\mathrm{d}y$ 做近似计算的式子。

因此，对其进行理想化的细分后，就可以得到接下来的公式。

1 换元积分：Integration by Substitution。

公式 3-2 | 换元积分公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(g(y))g'(y)\mathrm{d}y$$

(应用举例)　求 $\int_0^1 10(2x+1)^4\,\mathrm{d}x$

令 $y=2x+1$，即做如下变量代换：$x=g(y)=\dfrac{y-1}{2}$

由于 $y=2x+1$，所以 $\mathrm{d}y=2\mathrm{d}x$，最终 $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}y$

于是，我们只需考虑对y积分求原函数，因为

$0=g(1)$，$1=g(3)$，所以积分区间变成 1~3。

$$\int_0^1 10(2x+1)^4\,\mathrm{d}x=\int_1^3 10y^4\frac{1}{2}\mathrm{d}y=\int_1^3 5y^4\mathrm{d}y=3^5-1^5=242$$

第3章 本章习题

1. 计算以下定积分。

(1) $\int_1^3 3x^2\mathrm{d}x$　　(2) $\int_2^4 \dfrac{x^3+1}{x^2}\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^5 x+(1+x^2)^7\mathrm{d}x+\int_0^5 x-(1+x^2)^7\mathrm{d}x$

2. 计算以下定积分。

(1) 将 $y=f(x)=x^2-3x$ 的图像与 x 轴所围成的面积，用定积分的形式表达出来。

(2) 计算(1)中的面积。

第4章

复杂的函数可以通过积分解决



1 三角函数是做什么用的



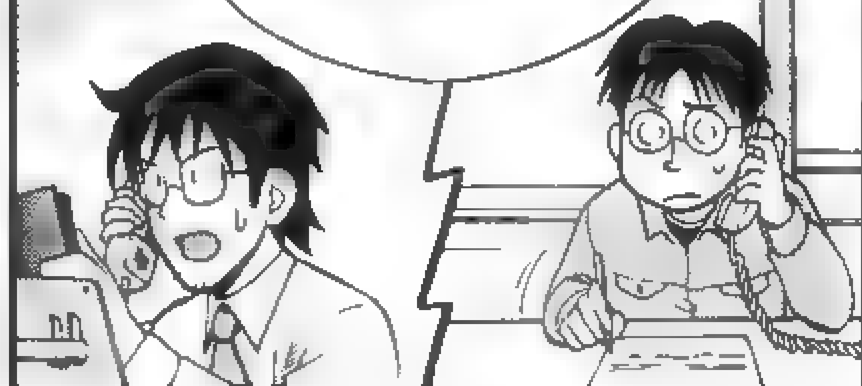








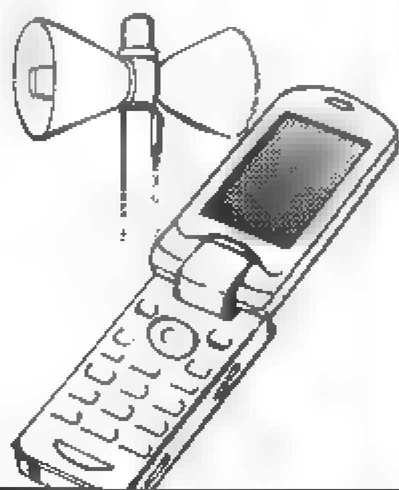
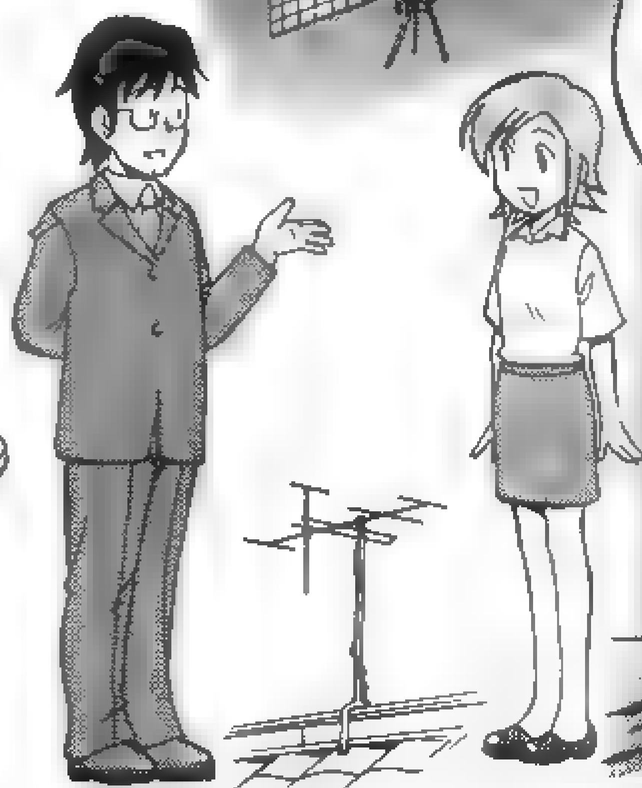
原来是这样啊！
从前我采访的时候，
可没有这么方便的
通讯工具……
所以，在来不及交稿时
常常都要用公用电话……



通过电话将原稿
一字一句地读给
在社里守候的
记录人员……

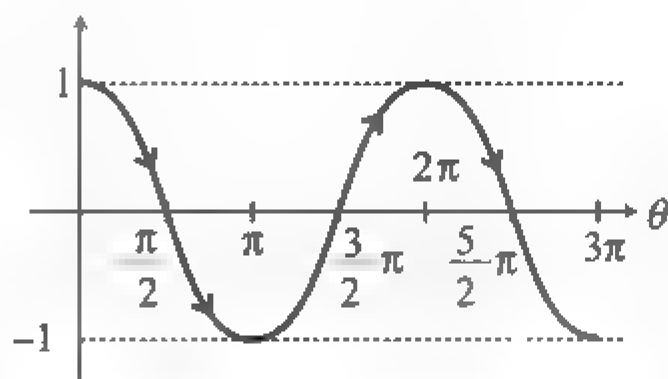


说起来，
还真是多亏了
无线电波。
啊！
不是吧？

除了我们生活中常出现
的电波以外，自然界中
还存在各式各样的波。
海洋、地震、
声波……
光也是如此。

那你知道这些波能够用函数表示出来吗？比如说“cosθ”。

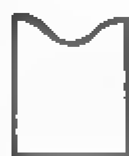


唉——
真是三句话
不离本行啊！

书籍扫描：铜板+西瓜

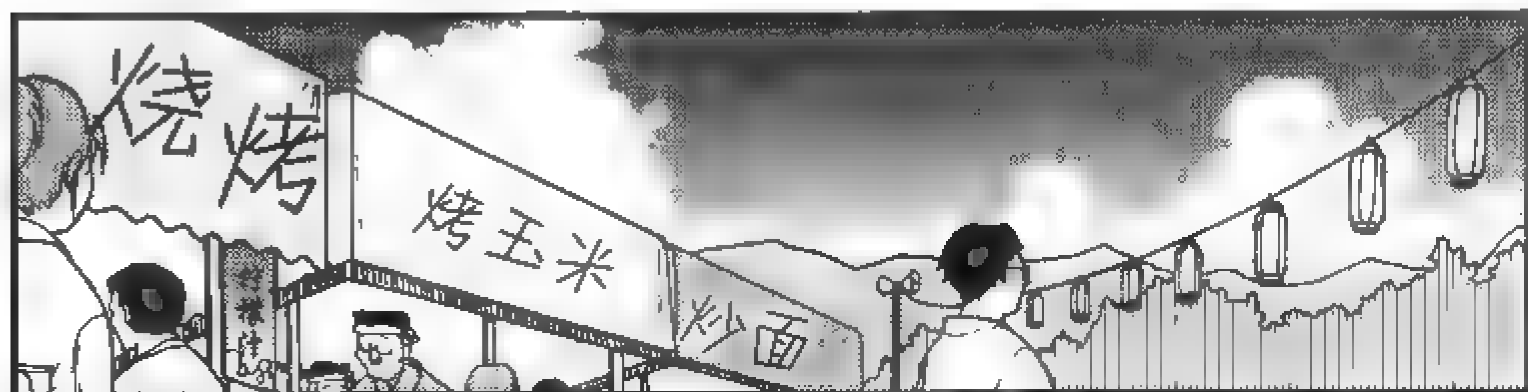
引间小姐！

顺便提一下，将西服的袖子切开就能得到cosθ的图形了。



三角函数对于西装裁剪也是很重要的哟！

是啊，是啊！











在以O(0,0)为圆心、1为半径的圆上，一动点P从点A(1,0)出发，沿圆周移动，所经过的圆心角为θ。

所移动的长度(弧AP的长)形成的角度，其单位就是所说的弧度(rad)。

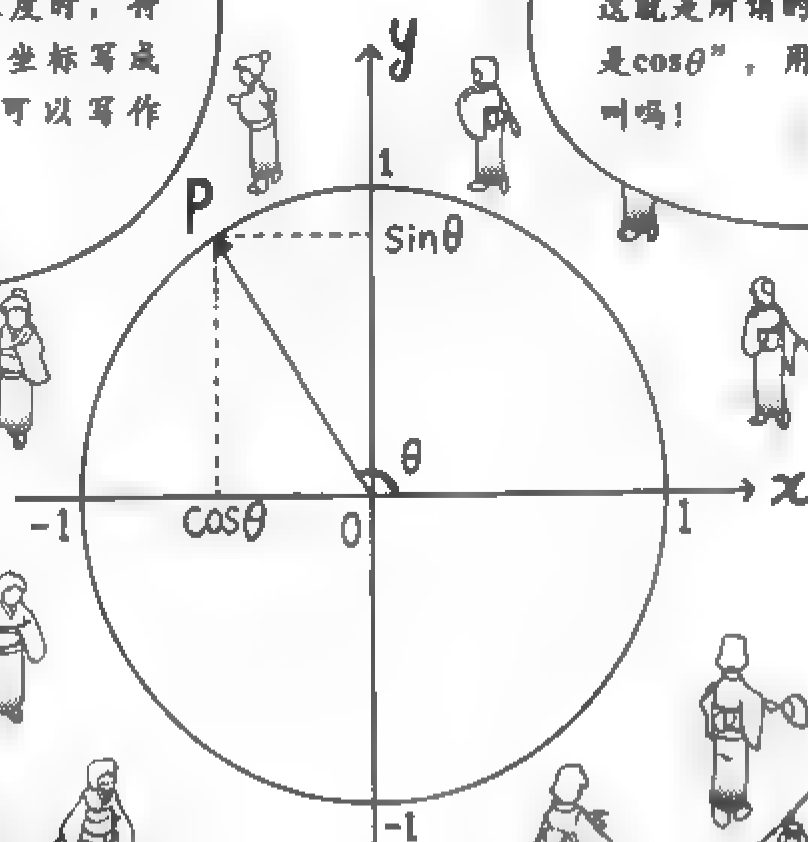
y
1
P
θ
A
x
−1
O
1
−1

我们都知道圆周长 =2π，再比如说，我们会得出 90度=$\frac{\pi}{2}$弧度，180度=弧度。

从现在起，我们全部使用弧度作为角度的单位。

于是，这个跳舞的圆转过了θ弧度时，将P点的x轴坐标写成函数，就可以写作“cosθ”。

啊——这就是所谓的“那也是cosθ”，用得着大叫吗！



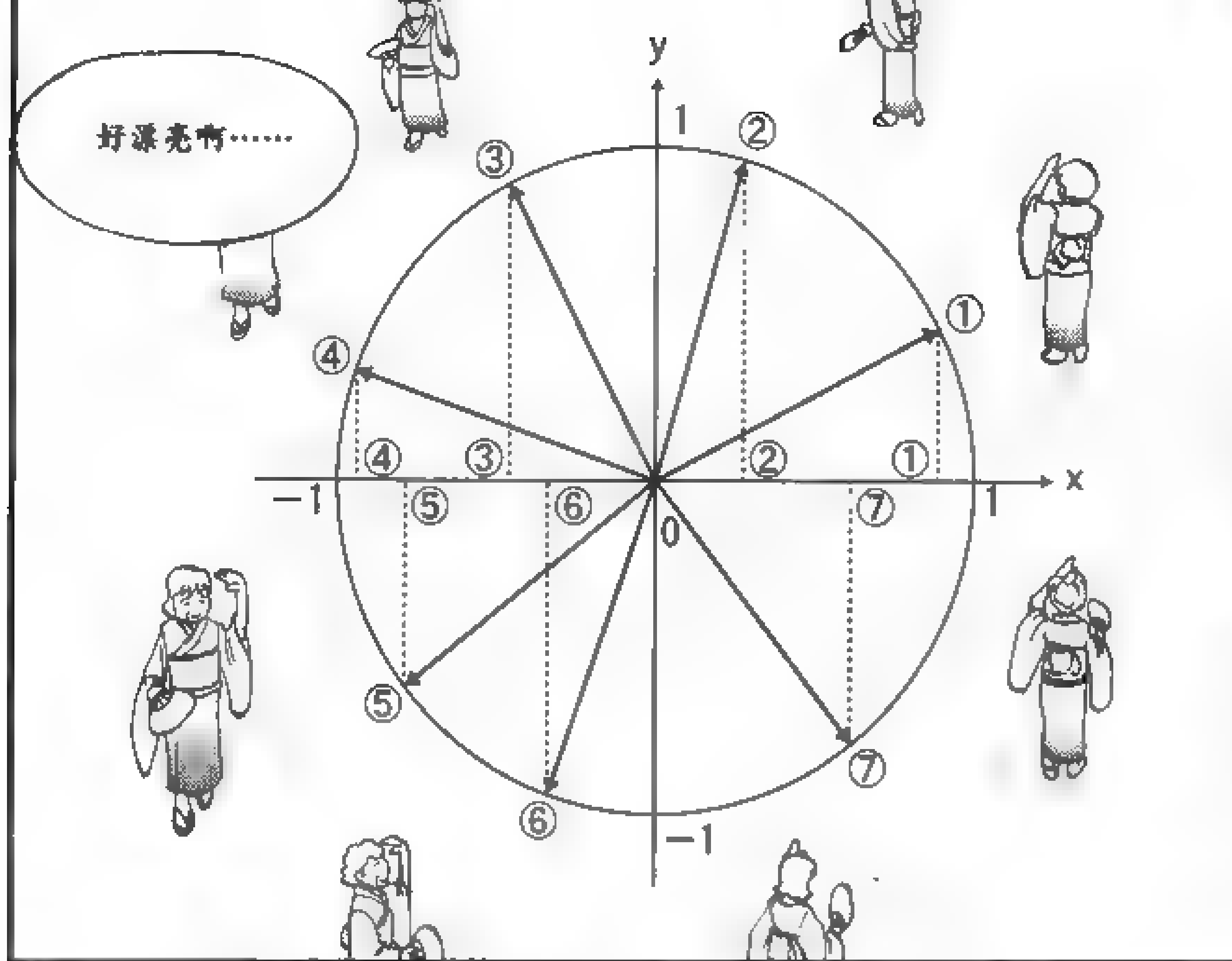
这个人的脑袋里到底……

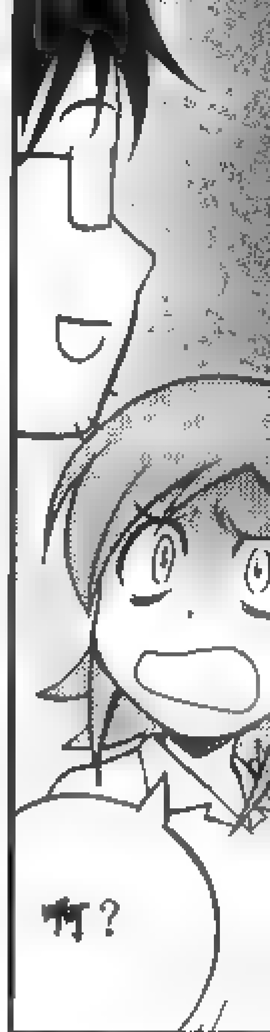
同样，y轴坐标可以写作sinθ。

是啊。

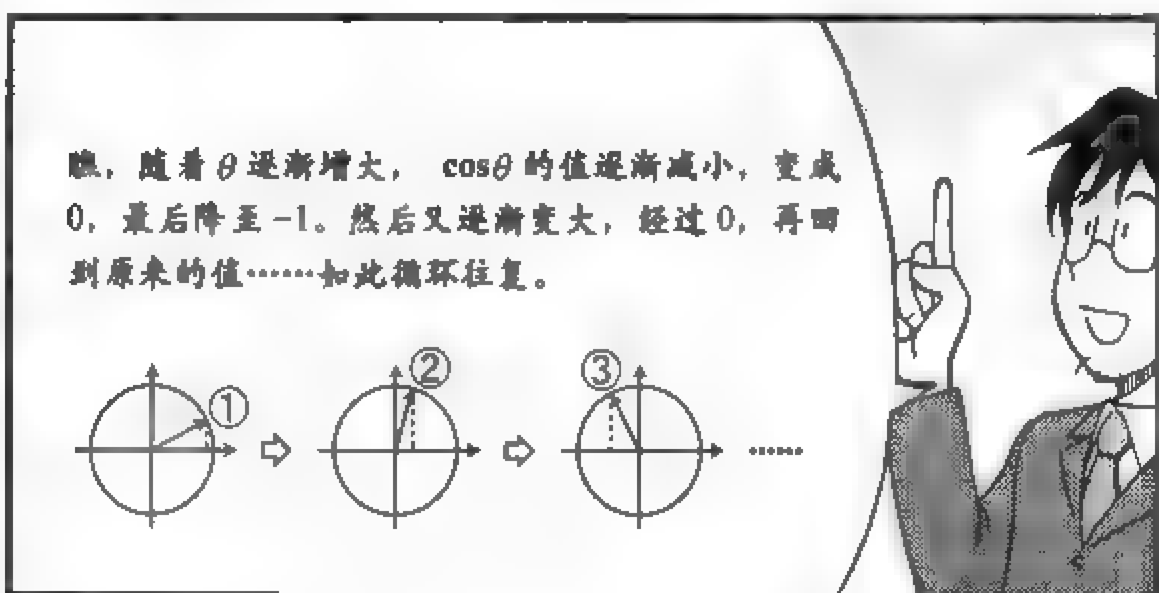
引间小姐！快看!!

转


好漂亮啊……
y
1
x
-1
0
-1


啊？


漂亮？


嗯，随着θ逐渐增大，cosθ的值逐渐减小，变成0，最后降至-1。然后又逐渐变大，经过0，再回到原来的值……如此循环往复。

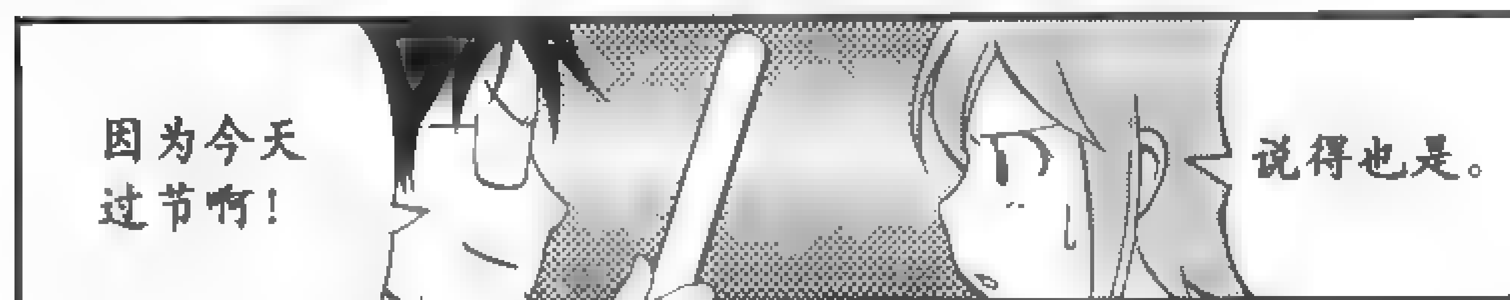

这么说来，cosθ一定是在1到-1之间振动的。
没错！三角函数是一种工具，可以通过它所表示的波动来解释很多自然界中的现象。


实在是Beautiful!
哇！老婆婆们误会你的意思了，跳得更起劲了！

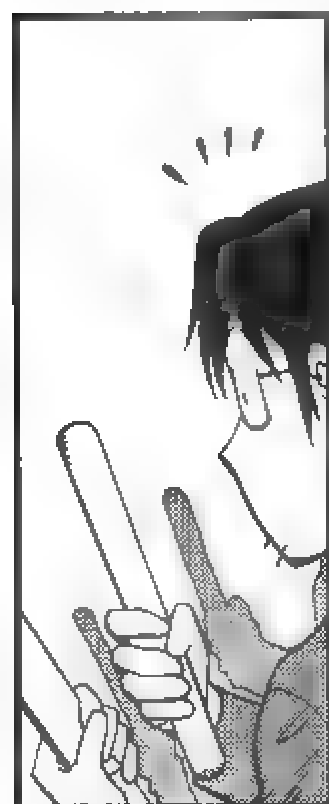
2 cos是垂直投影？



很意外吧？
如此盛大的
庆典！
是啊……
可是，您拿着太
鼓的鼓槌做什
么啊？



因为今天
过节啊！
说得也是。

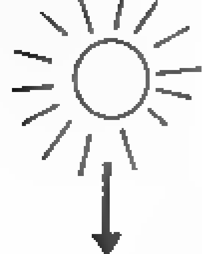


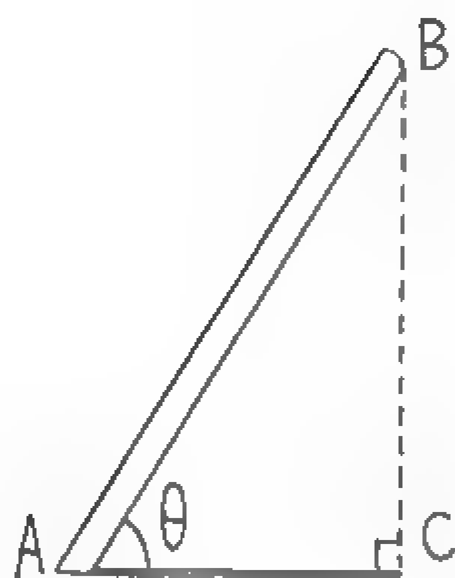


你知道吗？
影子的长度
鼓槌长度×cosθ。
嗯！
没想到。
不过模模糊糊
有点印象

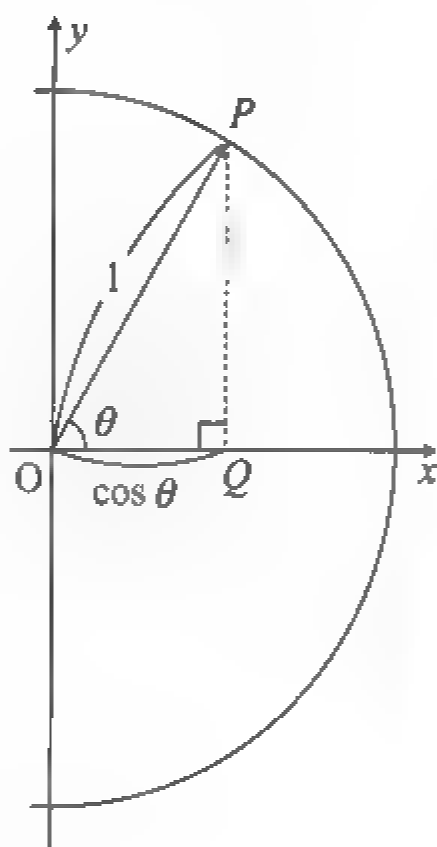


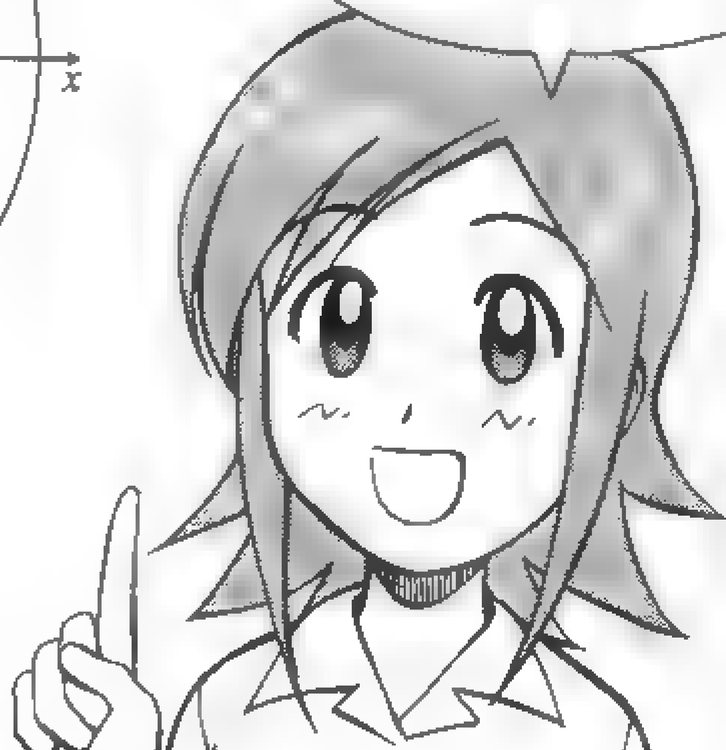
那么，我来
给你做一下
正确的示范。
啪




B
A
θ
C

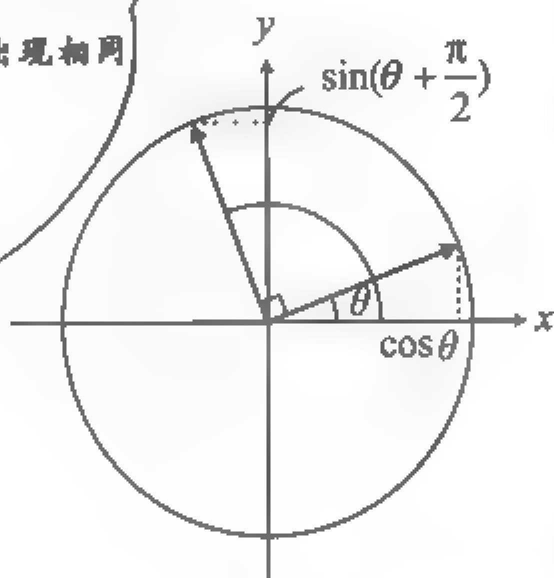

倾斜于地面放置的棒AB，倾斜角为θ，太阳从它的正上方垂直照射。
此时的影子(垂直投影)为AC，于是可得影子AC的长度=棒AB的长度×cosθ。


y
P
1
θ
O
cos θ
Q
x


因为△OPQ同上面的△ABC各个角都相等。
所以，两三角形“相似”AB:AC=1:cosθ，于是,可得AC=AB× cosθ。


就是说， cos表示的是向某个方向投影时的缩小率。

接着刚才的讲，x轴旋转90度（$\frac{\pi}{2}$弧度）就是y轴，$\sin\theta$是比$\cos\theta$滞后$\frac{\pi}{2}$才出现相同值的函数。



也就是说，

$\sin(\theta+\frac{\pi}{2}) = \cos\theta$。

$Sin(\theta+\frac{\pi}{2})=\cos\theta$

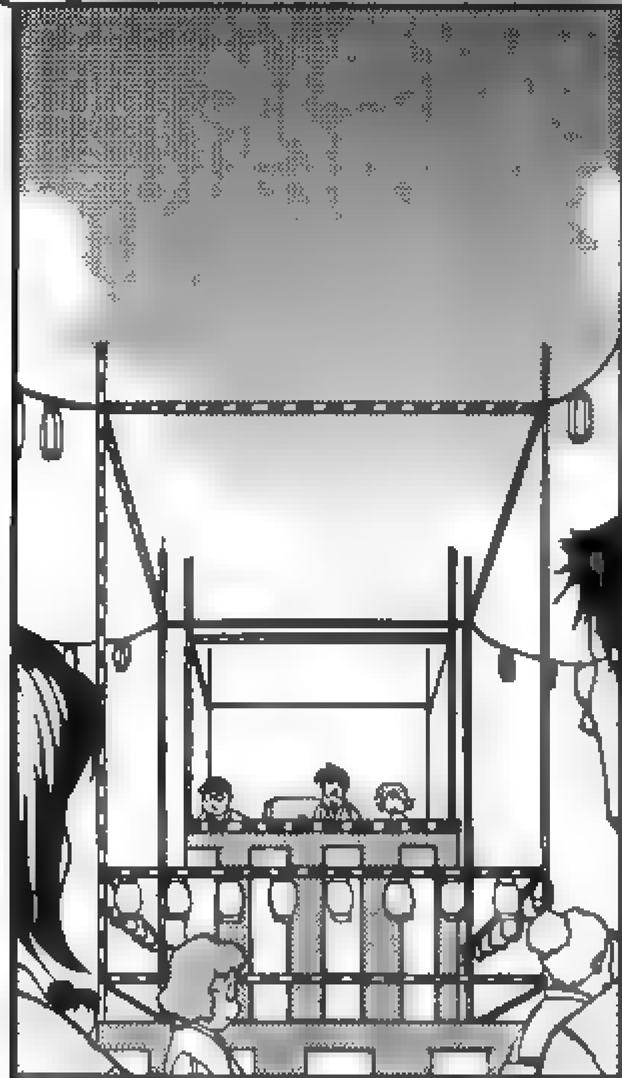
$\cos(\theta+\frac{\pi}{2})$
$=-\sin\theta$

……？
有什么事吗？

那个……鼓槌
可以还给我了吗？

来吧！
算田夏妆节，
现在
正式开始！！

3 先来了解三角函数的积分







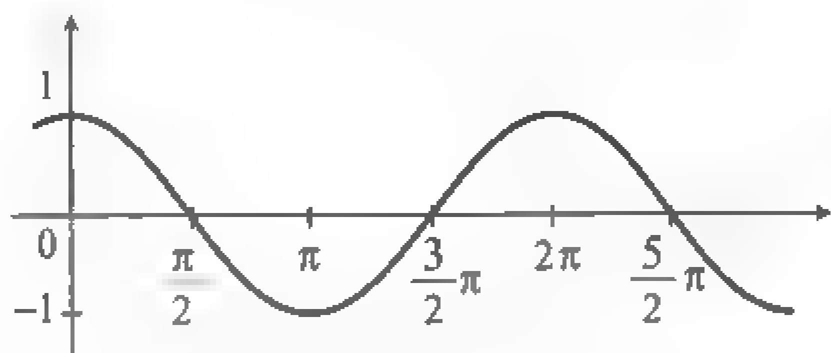


(cosθ × $\Delta\theta$的和)

$$=\cos\theta_0(\theta_1-\theta_0)+\cos\theta_1(\theta_2-\theta_1)+\cdots+\cos\theta_{n-1}(\theta_n-\theta_{n-1})$$

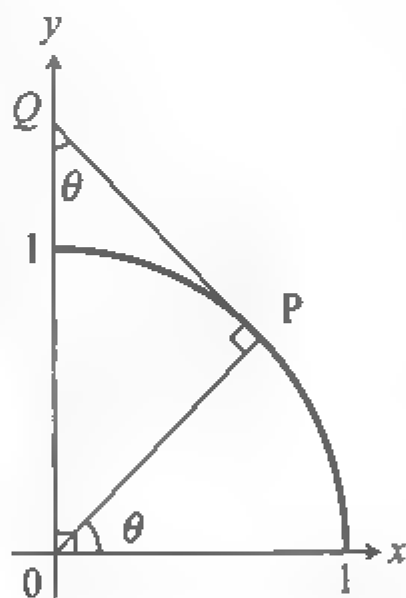
把它变换成什么形式比较好？

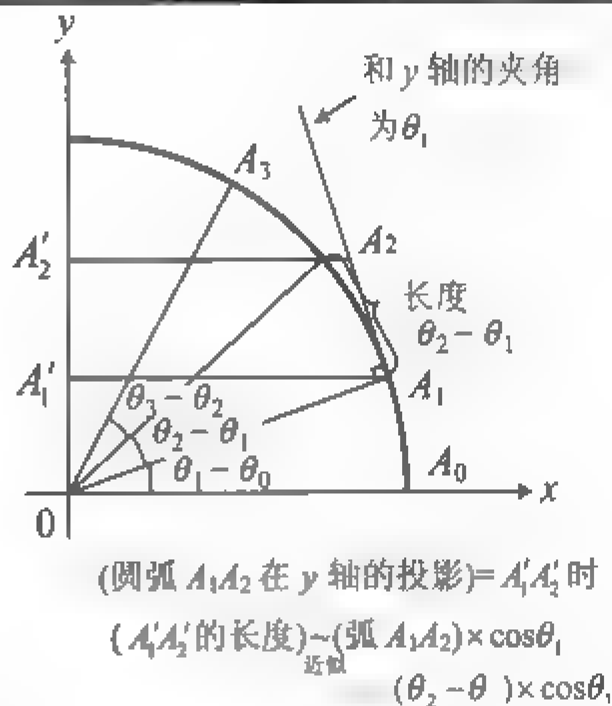
看上去，还真是束手无策啊……

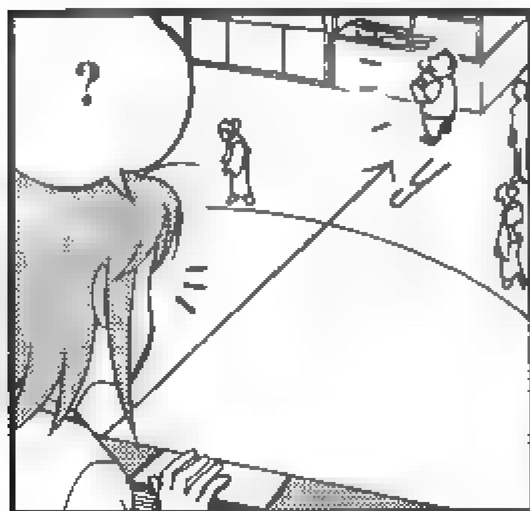


看看这个图，再看看之前的图，有没有注意到一个很巧妙的方法？

以(1, 0)为起点，移动θ角到达点P，P点的切线PQ同y轴的交角也同样会是θ。





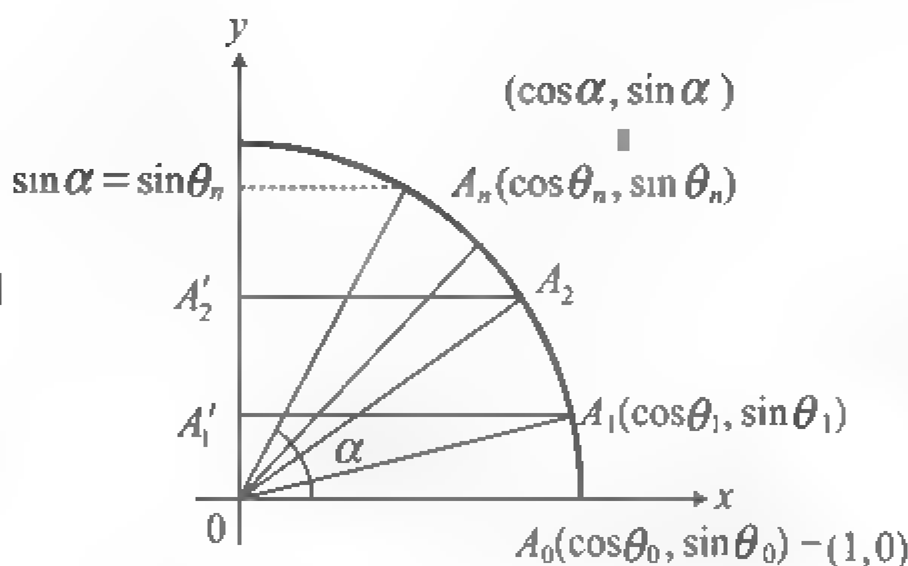






试着用这个做一下从0到α的定积分吧。

嗯……



(θ由0移动到α时，$\cos\theta\times\Delta\theta$的和)

$$=\cos\theta_0(\theta-\theta_0)+\cos\theta(\theta_2-\theta)+\cdots+\cos\theta_{n-1}(\theta_n-\theta_{n-1})$$

$$\underset{近似}{\sim} A'_0A'+A'A_2+\cdots+A'_n A_n=A'_0A'_n$$

$$=\sin\alpha$$

……就是这样吧！

没错。将这个无限细分之后……

也就是说，对cos的积分就会得到sin。

$$\int_0^\alpha \cos\theta d\theta = \sin\alpha-\sin 0$$

那么，反过来说，对sin微分就会得到cos？

完全正确！

总结一下公式把它记下吧！

公式 4-1 | 三角函数的微分和积分

$$\int_0^{\alpha} \cos\theta d\theta = \sin\alpha - \sin 0 \qquad —①$$

因以，

$$(\sin\theta)' = \cos\theta \qquad —②$$

将②中的θ替换为$\theta + \frac{\pi}{2}$试试看。

$$\left(\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \quad 于是，有 \quad (\cos\theta)' = -\sin\theta \qquad —③$$

进行微分或积分之后，sin 和 cos 之间会相互转换。



微积分之舞
三角函数版

〈编舞者解说〉



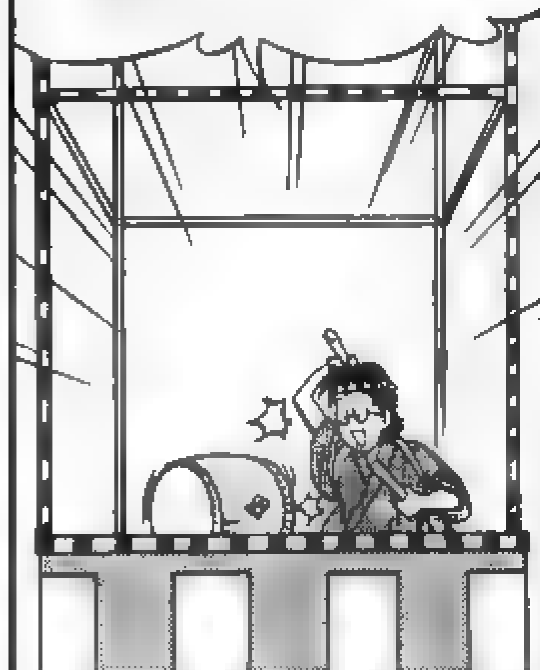
【将双手举向右上】



【边跳边向左转】



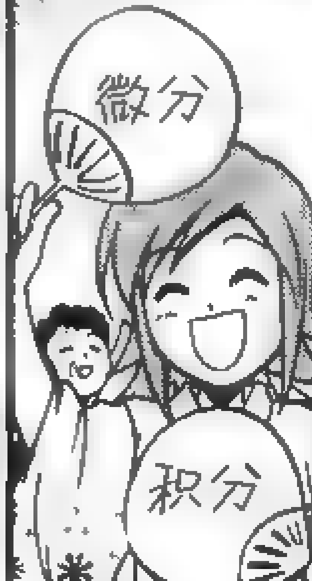
【在跳跃的同时
双手在前方拍两下】


微微、分分、
微微是分！
通过舞蹈也能明白简单的
微积分理论。




sin和cos，
圆中微
微积分。
【高举双手画圆形】


sin的微分
是cos。
【双手画个S形】
sin
微分
$(\sin\theta)' = \cos\theta$


sin和cos，
圆中微
微积分
交替着~
【右 左手交替
上下挥舞】
啊！就是这样！
微分
积分


cos的积分
是sin。
【双手画个C形】
积分
cos
$\int_0^{\alpha} \cos\theta \, d\theta = \sin\alpha$



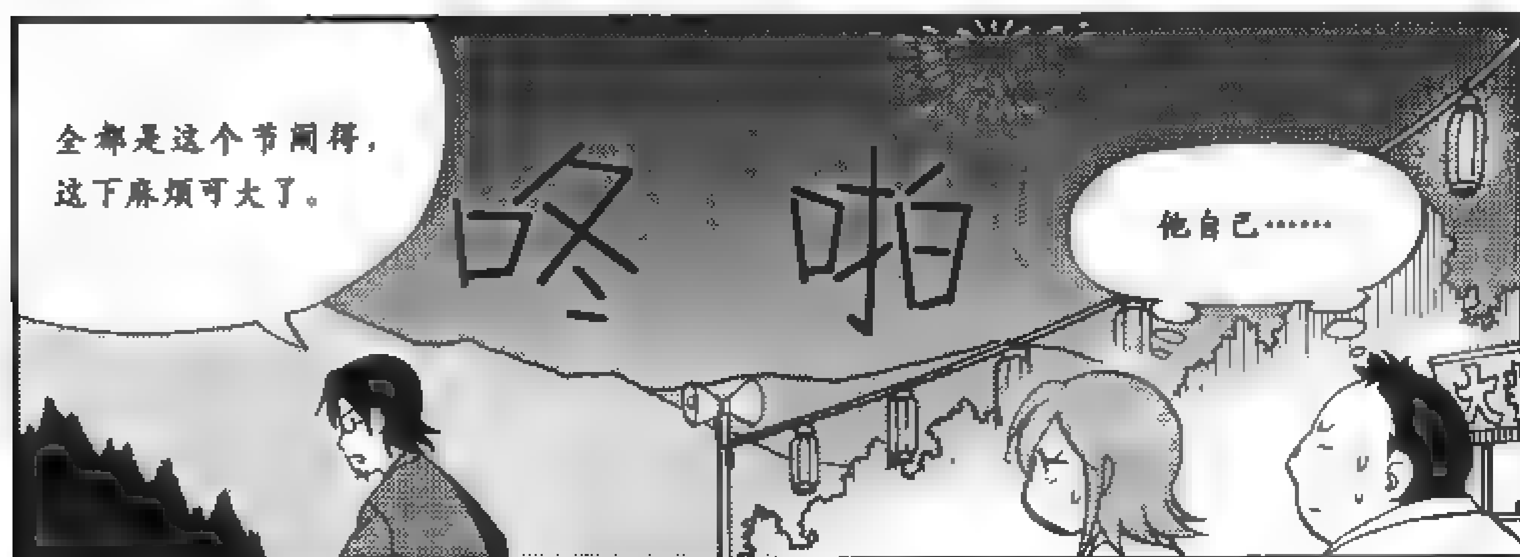
增井
来跳舞吧——
不行啊……
这些小棒上的美
味我连一半都没
吃完呢。



我们可是
来采访的啊！
引间小姐，
就你这身装束还
谈什么采访……



哎呀！
我怎么能
和你们两个
在这胡闹呢，
明天的晨报
都要来不及了！
无力



全都是这个节闹得，
这下麻烦可大了。
咚啪
他自己……

4 指数和对数

算田镇今社
晨访报社
搞定！
发信！
呼
发信
收件人：
呼……
终于把原稿
发出去了。
真是多亏了电脑和电子邮件啊，记者的工作也发生了变化。
但是，计算机所处理的信息只有0和1这两种符号也就是，通过“比特(bit)”列进行表示。
啊，我只知道丘比特！
是，是吗……
好像
扯远了……



计算机采用二进制来处理信息，1比特对应0，1两种模式，2比特对应00，01，10，11四种模式，3比特就对应8种模式，n比特就对应2^n种模式。

将x比特能够呈现出的模式数写作$f(x)$的话，有$f(x)=2^x$，就是所谓的指数函数。

指数函数？

指数函数

指数函数是

一种可以表示经济的发展随着时间变化的函数。

？

？？？

嗯

……

既然如此……

就举个例子……

20世纪50年代，

日本的经济呈现高速增长，

年增长率高达10%。

那时，年收入500万日元的人，次年的年收入就会增长为550万日元。

薪水比前一年高出10%，所享受的商品和服务也就多出10%。

竟然有如此好的时代！
要是我的话，
一定要疯狂地买衣服。

冷静一下！

现在，如果经济持续 10% 的增长，将目前的国内生产总值设为 G_0，那么数年后，就会变成这样。

1 年后的国内生产总值

$G_1 = G_0 \times 1.1$

2 年后的国内生产总值

$G_2 = G_1 \times 1.1 = G_0 \times 1.1^2$

3 年后的国内生产总值

$G_3 = G_0 \times 1.1^3$

4 年后的国内生产总值

$G_4 = G_0 \times 1.1^4$

5 年后的国内生产总值

$G_5 = G_0 \times 1.1^5$

那么，一般说来，n 年后的国内生产总值 G_n 是多少呢？

$G_n = G_0 \times 1.1^n$

顺便说一句，
$G_7 = G_0 \times 1.1^7 \approx G_0 \times 1.95$
就是说 7 年后约为 2 倍。

2倍

哇～
要是有
2 倍工资
要买什么
……

那么，我们将形如
$f(x) = a_0 \times a^x$ 的函数
称为指数函数。

年增长率为 α
的经济发展，
可以写作形如
$f(x) = a_0 \times (1+\alpha)^x$
的指数函数。

对了，我们刚刚提到，比特是用来表示信息的符号。

嗯，1比特为2种模式，2比特为4种模式。

比特也是一种指数函数，x比特对应$f(x)$种模式的话，就有$f(x)=2^x$。

不过，也存在通过模式数反过来求出比特数的“反函数”[1]。



简单地说，就是反过来想就可以了。

2种模式 → 1比特

4种模式 → 2比特

8种模式 → 3比特

⋮



也就是，由2^n种模式，推出n比特。

那么，假如要将由y种模式反推比特数的“$f(x)$的反函数”写作$g(y)$的话，你试着做一下吧。

就变成$g(2)=1$，$g(4)=2$，$g(8)=3$，$g(16)=4$，……



就是说，f和g的关系，可以表示为$g(f(x))=x$，$f(g(y))=y$。

指数函数的反函数称为“对数函数”[2]，用符号“log”进行表示，你要记好哦！

「log」



上述例子的情况可以写作$g(y)=\log_2 y$。

也就是，$\log_2 2=1$，$\log_2 4=2$，$\log_2 8=3$，$\log_2 16=4$，对吧？



1 反函数 Inverse Function。

2 对数函数：Logarithmic Function。

5 指数和对数的定义



虽然指数和对数很方便，不过在我们目前所给出的定义中，$f(x)=2^x$ 中的 x 仅仅为自然数，而 $g(y)=\log_2 y$ 中的 y 也仅限于 2 的指数形式。其余的，像 2 的 −8 次幂、2 的 $\frac{7}{3}$ 次幂、2 的 $\sqrt{2}$ 次幂、$\log_2 5$ 和 $\log_2 \pi$ 等，都不在我们定义的范围之内。

因此，我先来讲一下，通常要怎样对指数和对数进行定义。

咦？为什么要这么做？



还好，你一直都在听。这正好可以用到我们现有的微积分知识。







首先，我们将年“增长率”做一下“瞬时化”处理。



$$年增长率=\frac{(1年后的值)-(现在的值)}{(现在的值)}=\frac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}$$



就从这个式子开始吧！



那么，将它进一步写作“瞬时增长率”，就会得到这样的式子。

$$\text{瞬时增长率} = \left(\frac{(\text{瞬间之后的值}) \quad (\text{现在的值})}{(\text{现在的值})} \div (\text{所经过的时间}) \right) \text{ 的理想值}$$

$$= \left(\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{f(x)} \quad \frac{1}{\varepsilon} \right) \text{(其中，令}\varepsilon \to 0\text{)}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{f(x)} \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} = \frac{1}{f(x)} f'(x)$$



总之，“瞬间增长率” $= \dfrac{f'(x)}{f(x)}$，

如此定义就可以了！

此处，我们设“瞬间增长率”为常函数，即

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = c \quad (c\text{ 为常数})。$$

特别地，令 $c=1$ 时，求出满足

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \text{ 的函数 } f(x)。$$



要求出这个数，该怎么做呢？

1 首先，将其类推为指数函数试试看。

由于 $f'(x) = f(x)$ —— ☆

所以，$f'(0) = f(0)$ —— ①

在此，如果 h 足够接近 0 的话，回忆一下我们学过的

$f(h) \underset{\text{近似}}{\sim} f'(0)(h-0) + f(0)$。



由①得 $f(h) \sim f(0)h + f(0)$

$$f(h) \sim f(0)(1+h) \quad —②$$

然后，如果 x 足够接近 h 的话，就会有

$$f(x) \underset{近似}{\sim} f'(h)(x-h) + f(h)$$

因此，先将 x 看做 $2h$，（并且使用 $f'(h) = f(h)$）

$$f(2h) \sim f(h)h + f(h) = f(h)(1+h) \text{ (此处将②代入)}$$

$$\sim \{f(0)(1+h)\}(1+h) = f(0)(1+h)^2$$

即，

$$f(2h) \sim f(0)(1+h)^2$$

依次类推，$3h$，$4h$，$5h$，……逐一进行，只要 $mh = 1$ 的话，便会有，

$$f(1) = f(mh) \sim f(0)(1+h)^m$$

同理有，

$$f(2) = f(2mh) \sim f(0)(1+h)^{2m} = f(0)\{(1+h)^m\}^2$$

$$f(3) = f(3mh) \sim f(0)(1+h)^{3m} = f(0)\{(1+h)^m\}^3$$

即，

$$f(n) \sim f(0) \times a^n \quad (\text{令 } a = (1+h)^m)，$$

由此，可以看出一个大概的指数函数的样子[※注1]。

※注 1

$mh = 1$，所以，$h = \frac{1}{m}$。于是，有 $f(1) \sim f(0)\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$。

其中，当 $m \to \infty$ 时，$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \to e$。

即，$f(1) = f(0) \times e$，这与之后的内容(第139页)相一致。

2 其次，既然$f(x)$确实存在，我们就一定要将它找出来。



将$y=f(x)$的反函数写作$x=g(y)$。



$f(x)$的微分，从（☆）中的$f'(x)=f(x)$可知，就是其本身，这一点很清楚。那$g(y)$的微分是什么呢？

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)} \quad \text{——③}$$

← 通常都是这样[1]。

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{y} \quad \text{——④}$$

← 由此可见，反函数$g(y)$的微分，具体就是函数$\frac{1}{y}$。

这样的话，我们使用“微积分的基本定理”，可得，

$$\int_1^{\alpha}\frac{1}{y}\,dy=g(\alpha)-g(1) \quad \text{——⑤}$$

← 我们已经知道$g'(y)=\frac{1}{y}$，那么所谓的$g(\alpha)$，就是对$\frac{1}{y}$从1到α积分所得到的函数。

此处，我们先假设$g(1)=0$的话……

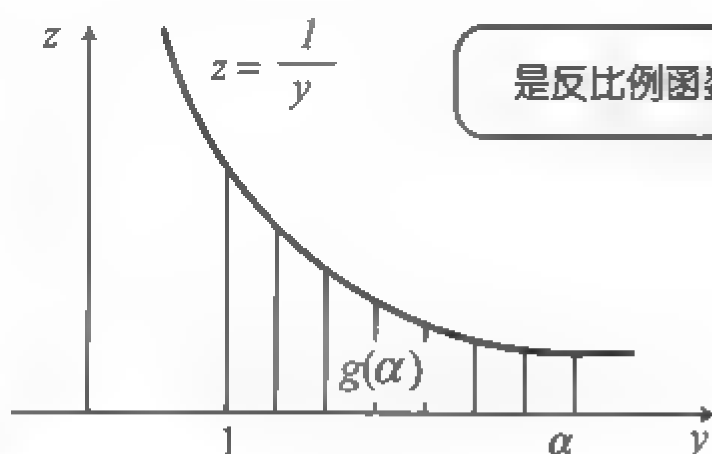


$$g(\alpha)=\int_1^{\alpha}\frac{1}{y}\,dy$$



说的太对了！接下来，画出$z=\frac{1}{y}$的图形看看吧！

1 如第75页所示，但$y=f(x)$的反函数为$x=g(y)$时，$f'(x)g'(x)=1$。



是反比例函数的图形啊！





我们将从 1 到 α 的范围内，图形与 y 轴所夹的面积定义为函数 $g(\alpha)$。这就是函数真实的状态。就是说，$g(\alpha)$ 是一个有明确定义的函数，α 可以是分数，也可以是 $\sqrt{2}$。

因为 $z=\frac{1}{y}$ 是一个具体的函数，所以也能够得到确切的面积。



由于 $g(1)=\int_1^1 \frac{1}{y}\,dy=0$，所以，有 $\int_1^\alpha \frac{1}{y}\,dy=g(\alpha)-g(1)$，满足⑤式。这样一来，我们就可以知道反函数 $g(y)$ 的原形，进而我们也可以知道原函数 $f(x)$ 了。

那么，我们晨访报社最近的增长率是多少啊？

……

不用紧张，是多少就说多少嘛。

哇——怎么哭得那么厉害啊!?

6 指数函数和对数函数的小结

1 将$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$看作是增长率。

2 满足 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=1$ 的$y=f(x)$，是增长率为常数 1 的函数。

它是指数函数的一种。并且，满足

$f'(x)=f(x)$ —— ☆

3 将$y=f(x)$的反函数写作$x=g(y)$，于是，有

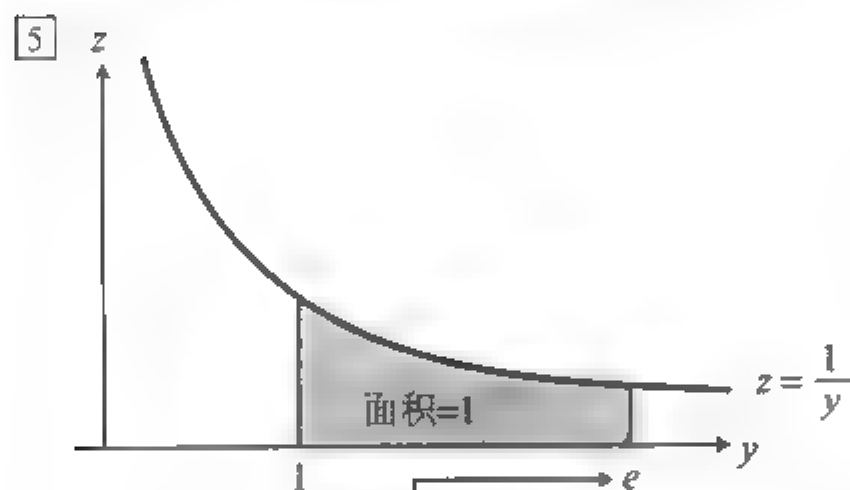
$g'(y)=\dfrac{1}{y}$ —— ☆☆

4 反比例函数$h(y)=\dfrac{1}{y}$图形的面积$h(y)$为

$$\int_1^{\alpha}\frac{1}{y}dy$$

将它定义为$g(\alpha)$，此函数满足☆☆以及$g(1)=0$，是$f(x)$的反函数。

5



e 是一个约为 2.7 的无理数。

使得$g(y)=1$的y，也就是将从 1 到α的范围内$\dfrac{1}{y}$与y轴所夹的面积为1的α，记为e(称为自然对数的底)

因为$f(x)$为指数函数，可以将其写作

$f(x)=a_0a^x$　（其中 a_0 为常数），于是有

$f(g(1))=f(0)=a_0a^x=a_0$。

又因为 $f(g(1))=1$，所以有 $a_0=1$，

即　$f(x)=a^x$。

同理，

$f(g(e))=f(1)=a^1$，

又因为 $f(g(e))=e$，

所以，$e=a^1$。

综合以上可知，$f(x)=e^x$。

反函数 $g(y)$为 $\log_e y$（也可以写作 $\ln y$，底数为 e 的情况通常做如此简写）。

将之前 1 ~ 5 中的$f(x)$和 $g(y)$，改写成e^x 和 $\ln y$

6 $f'(x)=f(x)\Leftrightarrow(e^x)'=e^x$

7 $g'(y)=\frac{1}{y}\Leftrightarrow(\ln y)'=\frac{1}{y}$

8 4 $\Leftrightarrow\int_1^y\frac{1}{y}\,dy=\ln y$

9 比特的函数 2^x 是对全体实数定义的，也可以将其写成

$f(x)=e^{(\ln 2)x}$　（x为全体实数）。

这是因为 e^x 和 $\ln y$ 是互为反函数的关系，所以

$e^{\ln 2}-2$

因此，对于全体自然数 x 有

$f(x)=(e^{\ln 2})^x=2^x$。

$$\frac{1}{x}=x^{-1},\quad \frac{1}{x^2}=x^{-2},\quad \frac{1}{x^3}=x^{-3},\quad \cdots$$

$$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}},\quad \sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}},\quad \sqrt[5]{x^4}=x^{\frac{4}{5}},\quad \frac{1}{\sqrt[4]{x}}=x^{-\frac{1}{4}},\quad \cdots$$

诸如以上种种函数都可以表示成 $f(x)=x^{\alpha}$ 的形式。

此时，通常有如下公式成立。

公式 4-2 幂函数的微分公式

对于 $f(x)=x^{\alpha}$，有 $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$

（例）

对于 $f(x)=\frac{1}{x^3}$，有 $f'(x)=(x^{-3})'=-3x^{-4}=-\frac{3}{x^4}$

对于 $f(x)=\sqrt[4]{x}$，有 $f'(x)=(x^{\frac{1}{4}})'=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

（证明）

因为 $e^{\ln x}=x$，所以我们可以将 $f(x)$ 表示成如下形式：

$f(x)=x^{\alpha}=(e^{\ln x})^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$。

因此，

$\ln f(x)=\alpha\ln x$。

两边同时微分后，

$$\frac{1}{f(x)}\times f'(x)=\alpha\times\frac{1}{x}$$

所以，

$$f'(x)=\alpha\times\frac{1}{x}\times f(x)=\alpha\times\frac{1}{x}\times x^{\alpha}=\alpha\times x^{\alpha-1}$$

分部积分公式

设$h(x)=f(x)g(x)$，则由积的微分公式，可得

$$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)。$$

所以可知，微分后为$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$的函数(原函数)就是$f(x)g(x)$，

根据微积分的基本定理可得，

$$\int_a^b (f'(x)g(x)+f(x)g'(x))\mathrm{d}x=f(b)g(b)-f(a)g(a)。$$

结合和的积分公式，便可以得到如下公式。

公式 4-3 | 分部积分公式

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x=f(b)g(b)-f(a)g(a)$$

(应用举例) 求$\int_0^\pi x\sin x\mathrm{d}x$。

根据分部积分公式，设 $f(x)=x, g(x)=\cos x, a=0, b=\pi$。于是，有

$$\int_0^\pi (x)'\cos x\,\mathrm{d}x+\int_0^\pi x(\cos x)'\mathrm{d}x=\pi\cos\pi-0\times\cos 0，$$

$$\int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x-\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x=-\pi。$$

因此，可得

$$\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x+\pi=\sin\pi-\sin 0+\pi=\pi。$$

第4章 本章习题

1. (1) $\tan x$ 是通过 $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ 定义的函数，求 $\tan x$ 的导函数。

(2) 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{\cos^2 x} dx$。

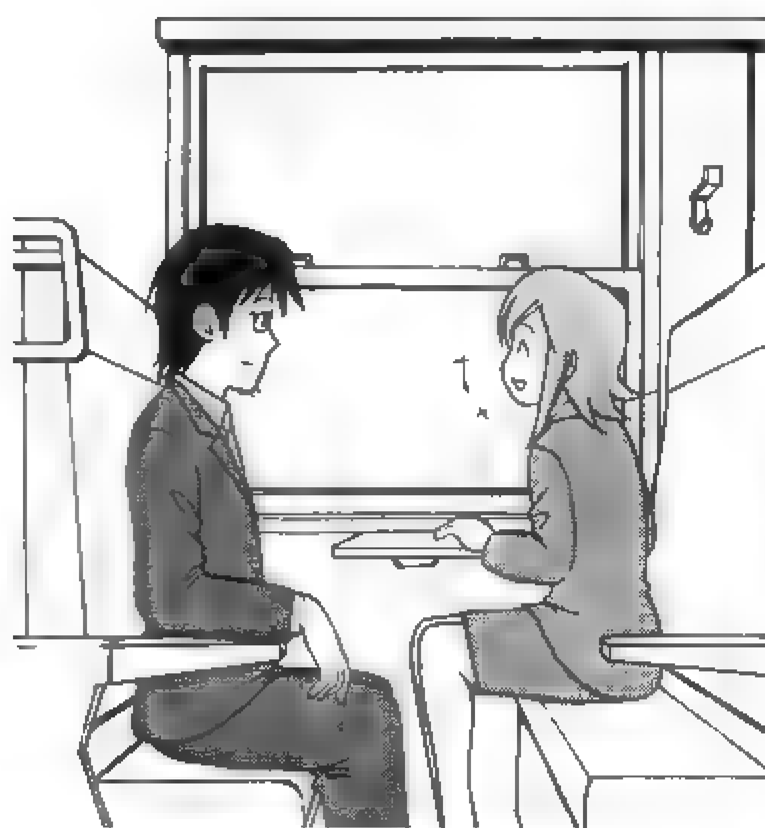
2. 求令 $f(x)=xe^x$ 中x的最小值。

3. 求 $\int_1^e 2x\ln x\, dx$。

(提示：设 $f(x)=x^2, g(x)=\ln x$，再进行分部积分)

第 5 章

泰勒展开



1 多项式近似

晨访报社

哇——
好气派啊！

我也想在
这里工作啊
……

我去谈点事情，
你就在大厅等我吧。

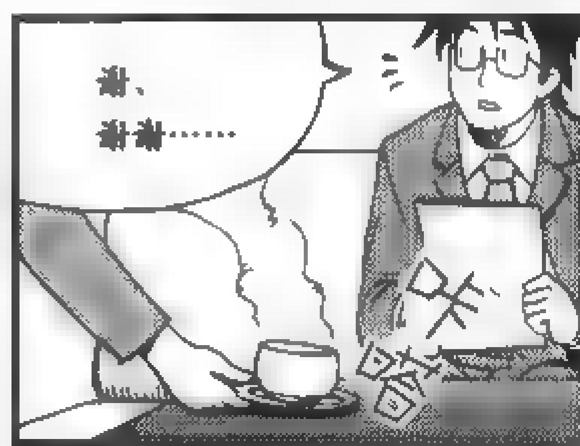
切……
嫌我碍事吗？

哼
哼


会客室
请多关照！


关先生的事很早以前就有所耳闻。


请您先来看一下这些数据吧。
打扰了，两位。

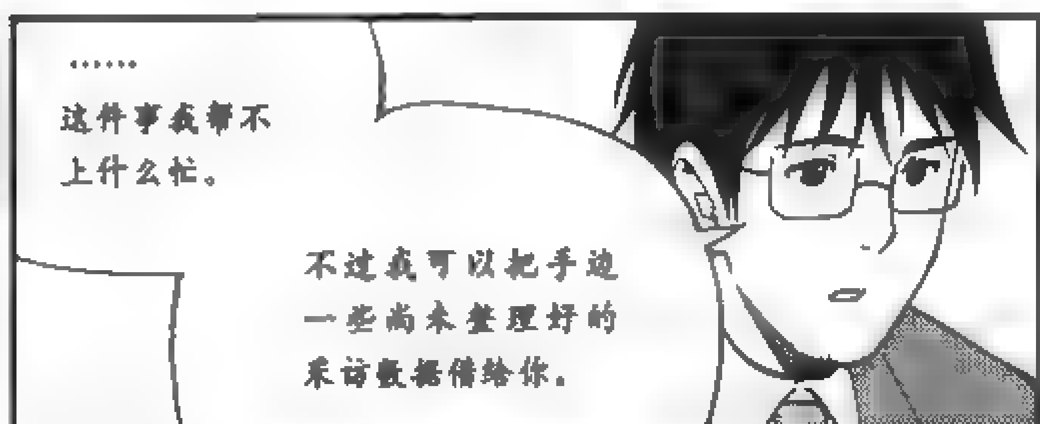

谢、谢谢……
咔嗒

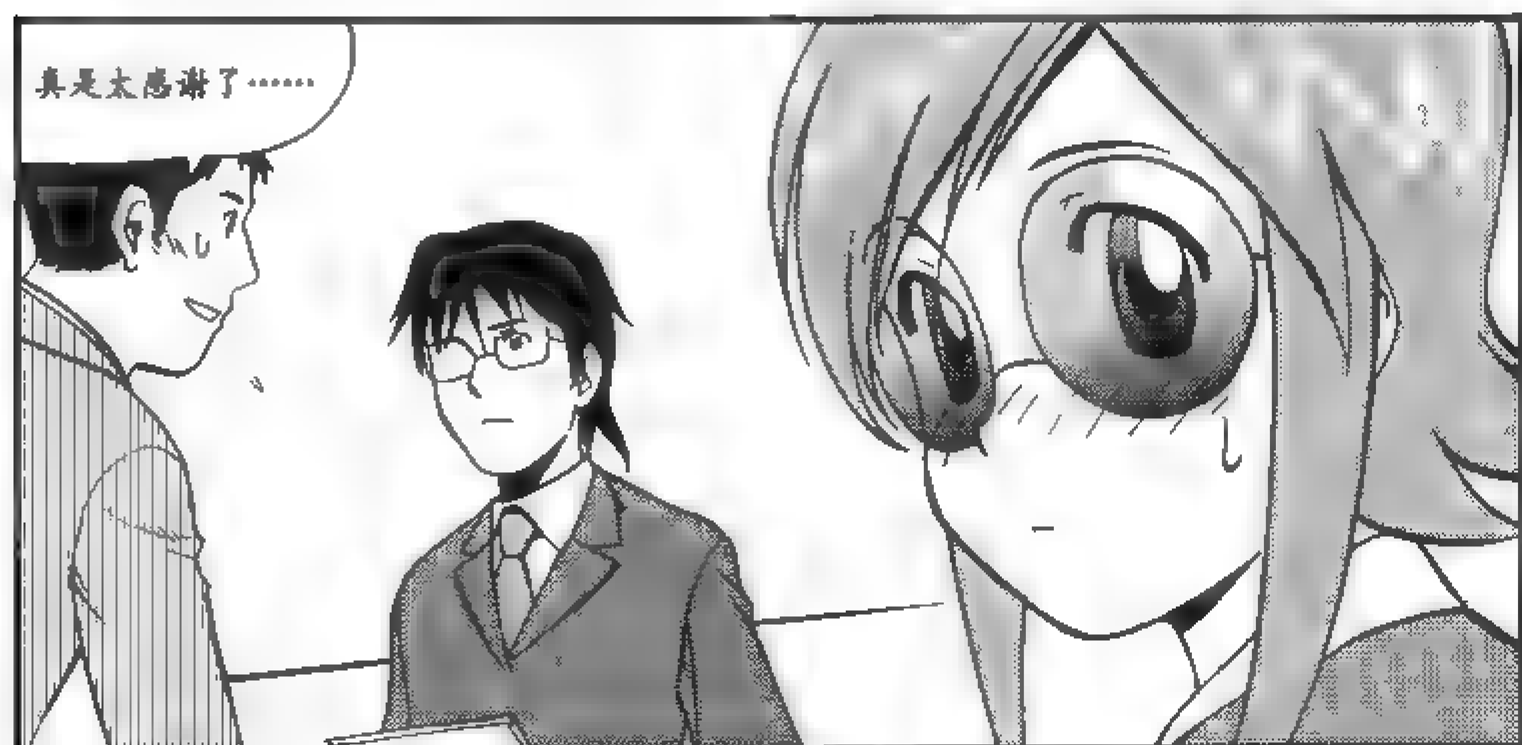

引……
多谢


引间……
在做什么呢？
太奇怪了……
哎呀，有灰尘
擦
擦


是K企业。
事实上，从那以后
也有人向我们
寄来揭发信。
我们经多方查证已经证
实这封信的可信度。


与您所写的报道
数据相同。
啊、啊啊……
这是哪里来的？

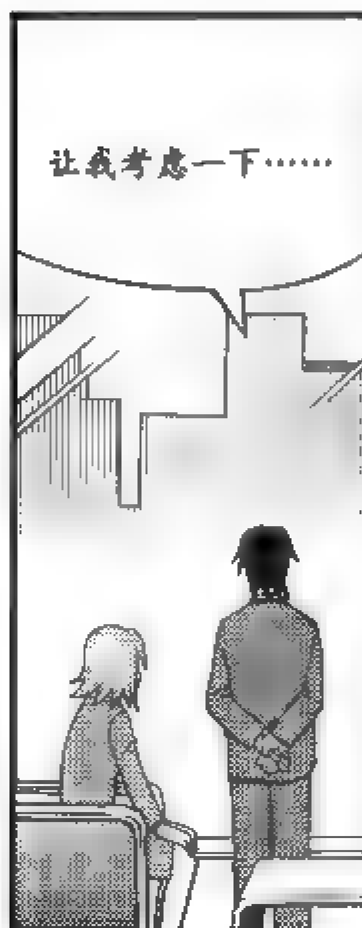

……
这件事我帮不
上什么忙。
不过我可以把手边
一些尚未整理好的
采访数据借给你。


真是太感谢了……











1 泰勒展开：Taylor's Expansion。

所谓微分，用一句话概括它的作用就是“近似一次函数”。

是为了将事物简单化，进行粗略的估计而采用的近似。对吧！

例如对于函数 $f(x)$，
令 $p=f'(a), q=f(a)$，
则在距 $x=a$ 很近的地方，
就能够将 $f(x)$ 近似为
$f(x)\sim q+p(x-a)$
这样的一次函数。

但是，也有将想知道的事物近似为二次函数或三次函数的情况存在。

是啊，
像那个瘦身后
又反弹的男偶
像K的例子。

那个例子
隔得太久了，
我们再举一个。

年利率为 x 时，
借出了 M 日元。

若1年后还款，
需还 $M(1+x)$，
若2年后还款，
需还 $M(1+x)(1+x)$，
n 年后还款，则需还
$M(1+x)^n$ 可以写作……

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3+\cdots$$

……这种形式※注1。

※注1　$(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+\cdots+C_n^nx^n$

这个是二项式展开公式，其中 $C_n^r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

$C_n^1=n$，$C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$，$C_n^3=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$，…，$C_n^r=\dfrac{n(n-1)\cdots\{n-(r-1)\}}{r!}$

我们只取出前面的部分
$(1+x)^n$可以用一次函数
$1+nx$进行近似。

$$(1+x)^n \underset{\text{近似}}{\sim} 1+nx$$

但是……

实际上，这样做太过粗略，结果并不理想。

要是引同一时疏忽，借了过多的钱而身陷债务危机。

啊——
请帮我
想想办法吧！

还钱

还钱

还钱

那么，只需使用二次函数做近似……

请、请等一下！我们报社为什么会用到泰勒展开!?

不要慌，你就再稍微了解一点吧。

公式 5-1 | 二次近似公式

$$(1+x)^n \underset{\text{近似}}{\sim} 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$$

将这个式子稍微做一下变形，就能得到一个很有趣的法则。



对于一组满足 $nx=0.7$ 的 n 和 x 来说，

$$(1+x)^n \sim 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2 \sim 1+nx+\frac{1}{2}(nx)^2-\frac{1}{2}nx^2$$

$$\sim 1+0.7+\frac{1}{2}\times 0.7^2=1.945\sim 2$$

因为很接近0而被忽略。

就是说，如果 $nx=0.7$，则 $(1+x)^n$ 约等于 2。将其看待成法则的话，

[不利于借款人的计算方法]

(借款年数)×(利率)＝0.7时，还款额约为借款额的 2 倍。

2%的利率借35年，还款金额约为2倍。

10%的利率借7年，还款金额约为2倍。

35%的利率借2年，还款金额约为2倍。



哎呀~~~~

好恐怖啊~~~~



例如，$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，

$$(f(x)=)\ \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots（无限延续下去）\qquad ——①$$

注意！这里不是~而是“=”！





令$x=0.1$，

于是，有$f(0.1)=\dfrac{1}{1-0.1}=\dfrac{1}{0.9}=\dfrac{10}{9}$

右边为：$1+0.1+0.1^2+0.1^3+0.1^4+\cdots$

$=1+0.1+0.01+0.001+0.0001+\cdots$

$=1.1111111\cdots$

然后，再具体计算一下$\dfrac{10}{9}$ ⟶

```
    1.111…
9) 10
    9
   10
    9
   10
    9
   10
    9
    ⋮
```

两者正好相一致。

般的函数(不过，要能够无限次地进行微分)$f(x)$，能被表示成如下形式时，

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

我们就将右边称为$f(x)$的**“泰勒(Taylor)展开”**。



这个公式，在包含$x=0$的某个限制区域内，才意味着函数$f(x)$同无限次多项式是完全一致的。然而，一旦超出了这个限制区域，那就意味着右边将会变成一个“无法确定”的数，请务必注意！

例如，在刚刚1式的两边代入$x=2$。

$$\text{左边}=\frac{1}{1-2}=-1$$

$$\text{右边}=1+2+4+8+16+\cdots\rightarrow$$

瞧，是不是变成一个无法确定的数了？



(顺便指出，上式子只有对满足$-1<x<1$的x才是成立的。这就是泰勒展开的限制区间。特别地，我们将这个$-1<x<1$称为收敛域[1]。)

1 收敛域：Circle of Convergence。

2 泰勒展开的求解方法

对于$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots$ ②

试着求系数a_n是多少。

首先，代入$x=0$，由$f(0)=a_0$,可知0次常数项a_0为$f(0)$。 —— (A)

然后，对②进行微分。

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$$ —— ③

将$x=0$代入③，由$f'(0)=a_1$，可知一次系数a_1为$f'(0)$。 —— (B)

继续对③进行微分。

$$f''(x)=2a_2+6a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots$$ —— ④

代入$x=0$，可知二次系数a_2为$\frac{1}{2}f''(0)$。 —— (C)

对④进行微分，

$$f'''(x)=6a_3+\cdots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}+\cdots,$$

由此可知，三次系数a_3为$\frac{1}{6}f'''(0)$。 —— (D)

持续进行这种运算，n次微分后，就应该得到

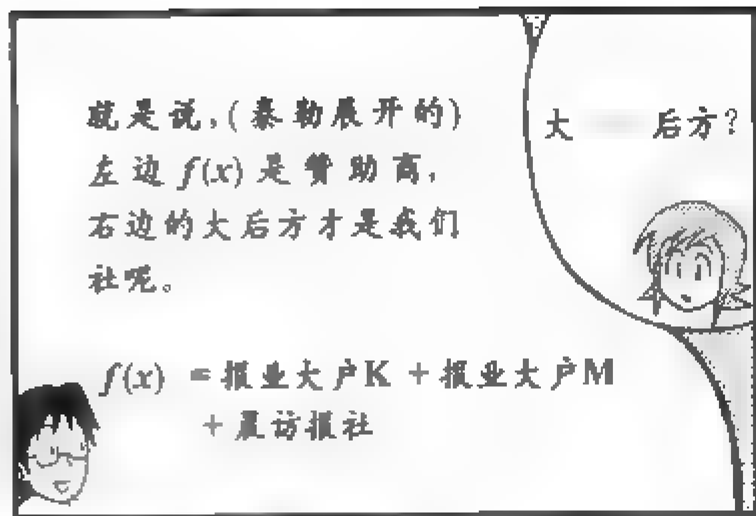
$$f^{(n)}(x)=n(n-1)\cdots\times2\times1a_n+\cdots,$$

其中$f^{(n)}(x)$表示n次微分后的$f(x)$。

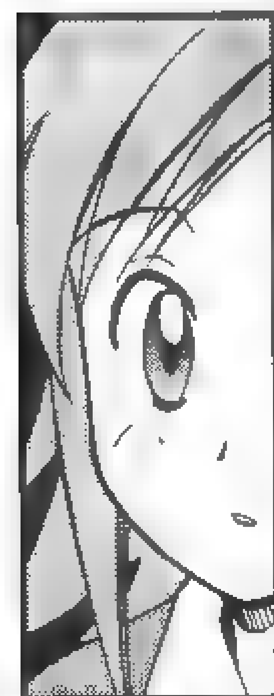
由此可知，n次系数a_n为$\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$。

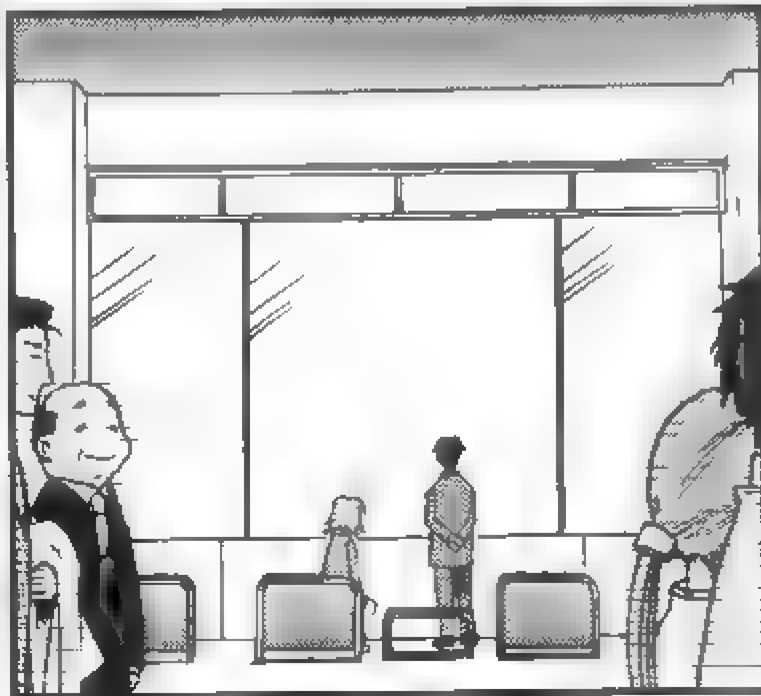
$n!$，读作"n的阶乘"，它表示$n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$。


那么，
我们报社究竟
陷入什么困境，
为什么要用那
个泰勒展开？
这个开场白有
点长了……


大　　后方？
就是说，(泰勒展开的)
左边 $f(x)$ 是赞助商，
右边的大后方才是我们
社呢。
$f(x)$ ＝报业大户K ＋报业大户M
＋晨访报社


反正是微不足道的，
所以，只要管理层一
换届，还是会继续赞
助的。
是这样的！
实际上，
对于K企业来说，
给我们的投资，
就如同三次微分后
三次项系数那样的
微不足道。






关社长……
你在总社的时候，
在哪里喝东西啊？
嗯？

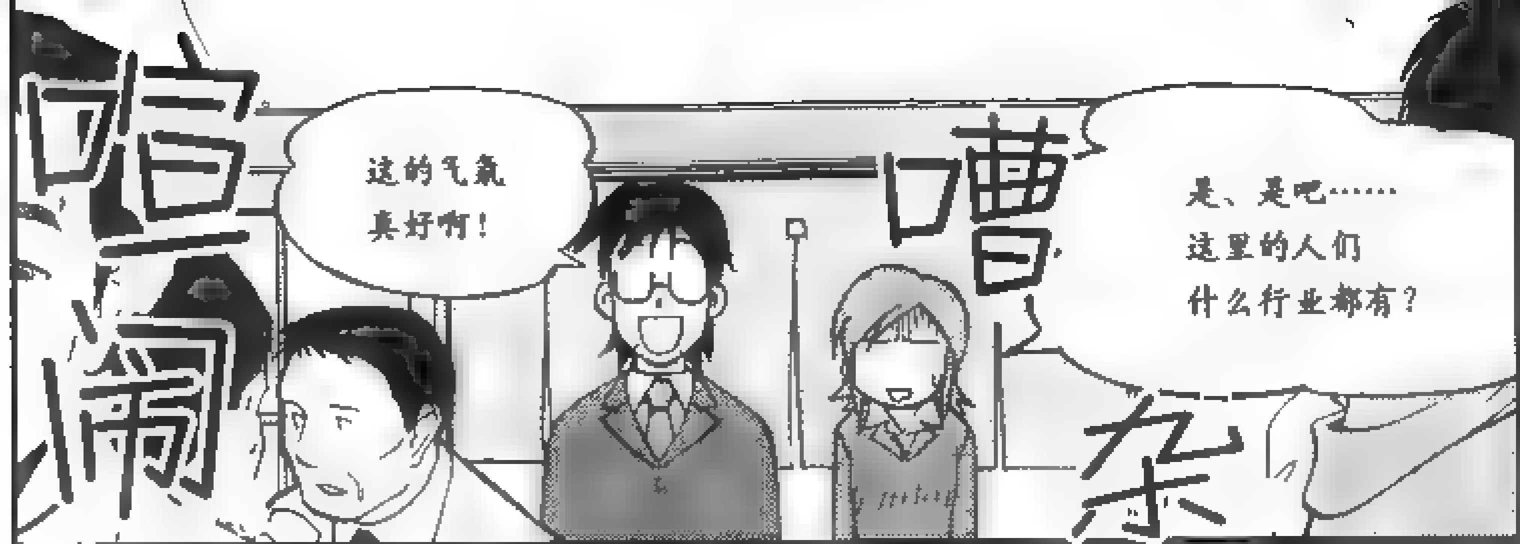

哎——
下班之后，
才会和大家
一起喝喝酒，
一起吹吹牛……
啊……

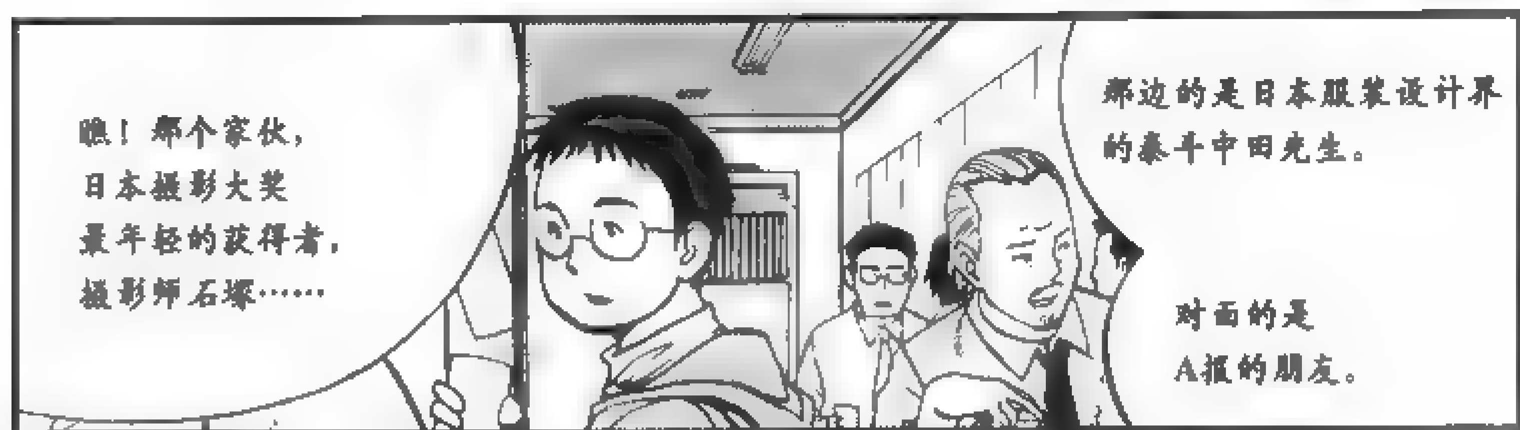

我们的工作
也结束了，
咱们喝一杯
怎么样？

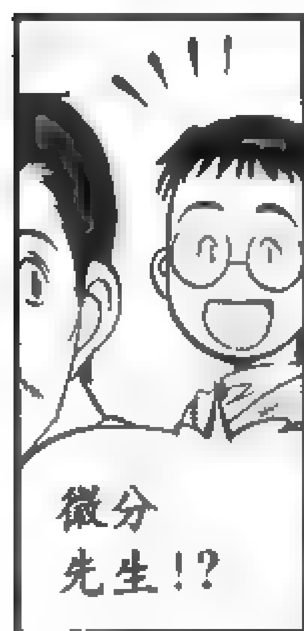



那就
去吧！
太好了！

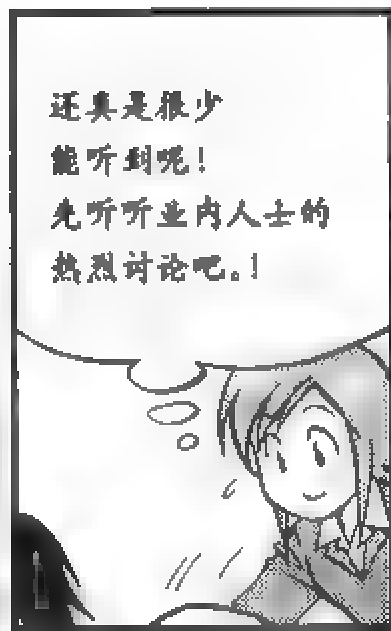

大众居酒屋
HOMEPAGE
24
小
时


喧闹
这的气氛
真好啊！
嘈杂
是、是吧……
这里的人们
什么行业都有？


瞧！那个家伙，
日本摄影大奖
最年轻的获得者，
摄影师石塚……
那边的是日本服装设计界
的泰斗中田先生。
对面的是
A报的朋友。


微分
先生!?


嗨，微分，
好久没来
这里了！
是啊！
好惊人的
绰号啊，
很贴切……


还真是很少
能听到呢！
先听听业内人士的
热烈讨论吧。!


○○先生
得了糖尿病了。
××也患了
高血压，
医生……
我也正考虑去做
一次全面体检……
都是大叔们的
话题……

公式 5-2 | 泰勒展开公式

对$f(x)$进行泰勒展开，便有

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{1!}f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(0)x^3+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\cdots$$

上述公式中，

$f(0)$	←0次的常数项	$a_0=f(0)$	——(A)
$f'(0)x$	←1次项	$a_1=f'(0)$	——(B)
$\frac{1}{2!}f''(0)x^2$	←2次项	$a_2=\frac{1}{2}f''(0)$	——(C)
$\frac{1}{3!}f'''(0)x^3$	←3次项	$a_3=\frac{1}{6}f'''(0)$	——(D)

关于进行“泰勒展开”的条件或者收敛域的介绍，此处从略。

使用这个公式，验证一下第151页的①看看吧。

$$f(x)=\frac{1}{1-x},\quad f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2},\quad f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3},\quad f'''(x)=\frac{6}{(1-x)^4}\cdots$$

$$f(0)=1,\ f'(0)=1,\ f''(0)=2,\ f'''(0)=6,\ \cdots,\ f^{(n)}(0)=n!\cdots$$

所以，

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{1!}f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(0)x^3+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\cdots$$

$$=1+x+\frac{1}{2!}\times2x^2+\frac{1}{3!}\times6x^3+\cdots+\frac{1}{n!}n!x^n+\cdots$$

$$=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$$

确实一样啊！





现在的公式是“在 $x=0$ 附近相一致的无限次多项式”。不过，一般地，在 $x=a$ 附近的相一致的多项式的公式，如下所示，请大家在第176页的练习问题中再做验证吧！

$$f(x)=f(a)+\frac{1}{1!}f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2$$

$$+\frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^{(n)}+\cdots$$

因此，可以说泰勒展开是一种函数近似的好方法。



3 各种函数的泰勒展开

[1] 平方根的泰勒展开

设 $f(x)=\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$

$f'''(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$

因此，

由 $f(0)=\frac{1}{2}$，$f''(0)=-\frac{1}{4}$，$f'''(0)=\frac{3}{8}$，…

可得，

$$f(x)=\sqrt{1+x}$$

$$=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2!}\times\left(-\frac{1}{4}\right)x^2+\frac{1}{3!}\,\frac{3}{8}x^3+\cdots$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3\cdots$$

[2] 指数函数 e^x 的泰勒展开

设 $f(x)=e^x$

$f'(x)=e^x$、$f''(x)=e^x$、$f'''(x)=e^x$、

因此，

$1=f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)$

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

将 $x=1$ 代入，

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$



在第4章中
我们曾经讲过
e 约等于2.7，
在此，给出完整的计算公式。

[3] 对数函数 $\ln(1+x)$ 的泰勒展开

设 $f(x)=\ln(1+x)$

$f'(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$

$f''(x)=-(1+x)^{-2}$、$f'''(x)=2(1+x)^{-3}$、

$f''''(x)=-6(1+x)^{-4}$、…，于是

$f(0)=0$、$f'(0)=1$、$f''(0)=-1$、$f'''(0)=2!$、

$f''''(0)=-3!$ …

因此，

$$\ln(1+x)=0+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}\times2!\times x^3$$
$$-\frac{1}{4!}\,3!\times x^4\cdots$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots$$
$$+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n+\cdots$$

[4] 三角函数的泰勒展开

令 $f(x)=\cos$

$f'(x)=-\sin x$、$f''(x)=-\cos x$、$f'''(x)=\sin x$、

$f''''(x)=\cos x$、

于是，$f(0)=1$、$f'(0)=0$、$f''(0)=-1$、

$f'''(0)=0$、$f''''(0)=1$、

因此，

$$\cos x=1+0x-\frac{1}{2!}\times1\times x^2+\frac{1}{3!}\times0\times x^3$$
$$+\frac{1}{4!}\times1\times x^4+\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}\times x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+\cdots$$

同理可证，

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}\times x^3+\frac{1}{5!}x^5\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots$$

4 从泰勒展开中能知道些什么



泰勒展开就是将复杂的函数改写成多项式。
比如说$\ln(1+x)$的图形，你画得出来吗？



毕竟，要将复杂的函数世界解释清楚，做“近似”是一种必要的手段。

刚刚的例子，使用了$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots$
想想看你能从泰勒展开中得出什么结论。



$$\ln(1+x)=0+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots$$

0次近似：0；1次近似：$0+x$；2次近似：$0+x-\frac{1}{2}x^2$；3次近似：$0+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$

首先看0次近似，在$x=0$附近时有$\ln(1+x)\sim 0$，
这意味着什么呢？

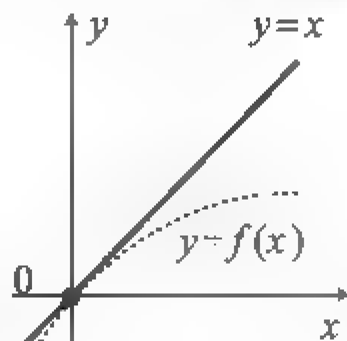


嗯、嗯……就是说，它意味着在$x=0$处，$f(x)$的值为0，
说明图形经过点(0，0)。



说的没错。接下来看一次近似，
在$x=0$附近，可知$y=f(x)$大约
近似成$y=x$。所以，这就意味着
在$x=0$处，函数处于递增的状态。

(一次近似：切线方程)

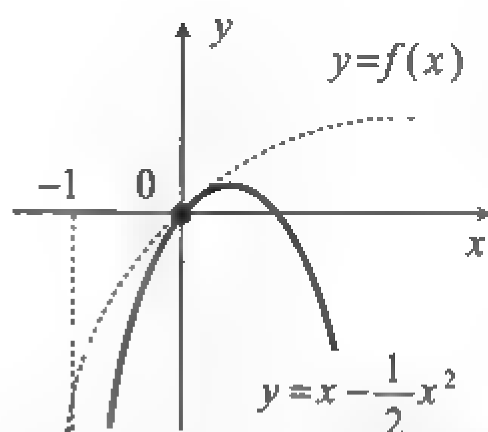


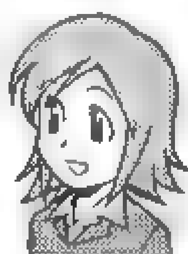


再进一步看二次近似，
在 $x=0$ 附近，想想看

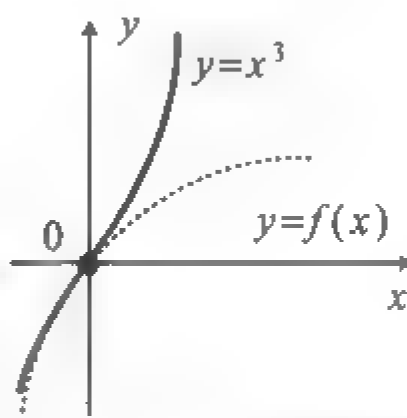
$$\ln(1+x) \sim x-\frac{1}{2}x^2$$

的图形。这意味着什么呢？





这意味着在 $x=0$ 附近，$y=f(x)$大约近似 $y=x-\frac{1}{2}x^2$，因此，在 $x=0$ 处，函数的图形是向上凸起的。
（二次近似：$x=a$ 处的凹凸特性）





保险起见的三次近似!!
在 $x=0$ 附近，

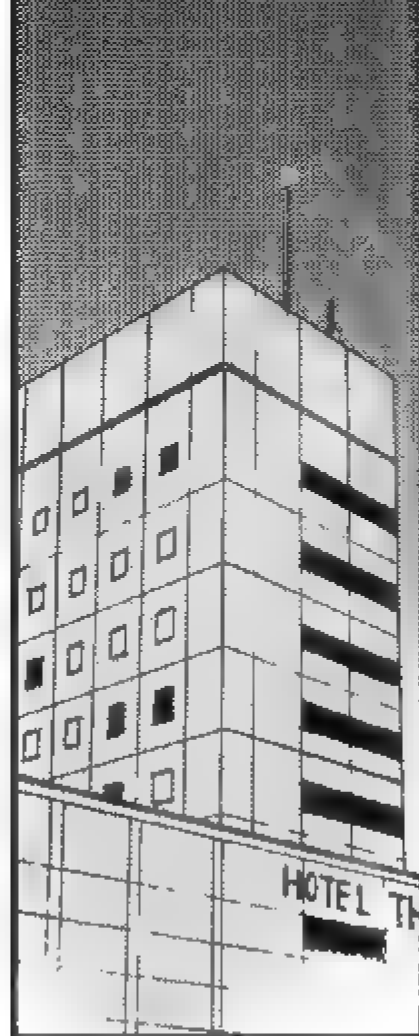
$$\ln(1+x) \sim x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$$

（三次近似：对二次近似的误差的修正。）



来吧，关先生，
咱们特试第2家！



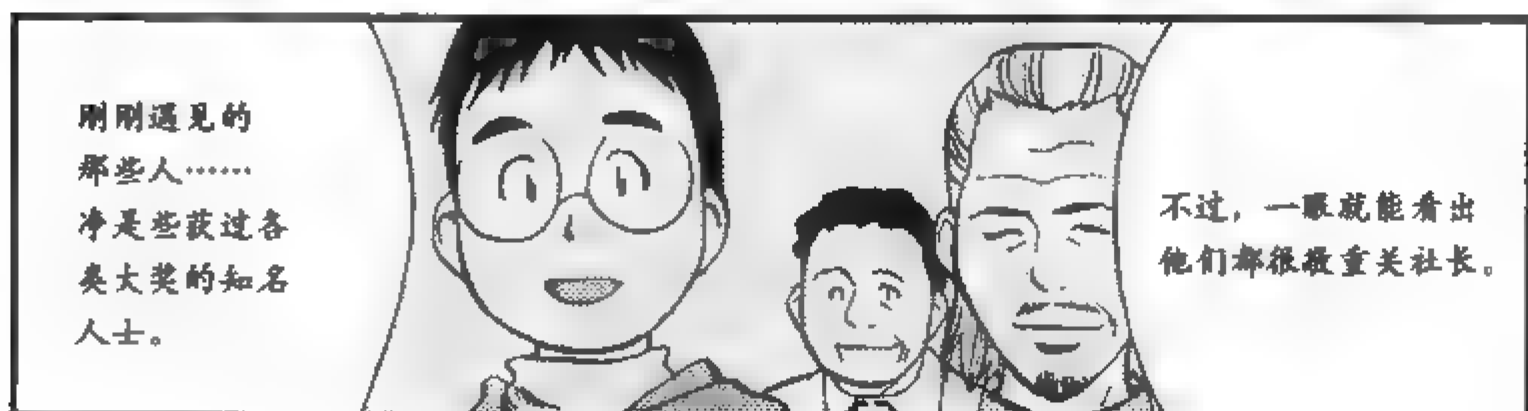

HOTEL TH


一开始就在这儿的话不就好了。
哎呀，还得说是宾馆里的酒吧，适合自在地聊天啊。
咯
咯
呵
呵
啪
嚓


话虽如此，不过，要是在那家店多聊会儿就好了……


……总觉得那些人都很有成就……感觉有些自卑啊。


关社长，您有什么感觉？


刚刚遇见的那些人……净是些获过各类大奖的知名人士。
不过，一眼就能看出他们都很敬重关社长。


关社长，
就算埋没在那个乡下的
分社中……
也心甘情愿吗？


关社长，
您只写公正的
报道……


别再给她
倒酒了，
已经够了。
呜呜


我能在某个酒馆同一
流的记者并肩喝酒的
概率会是多少呢……


说得好像谁都会用概率论进行
思考一样，并不是谁都可以的。

即使是刚刚的那些人也是不会的。

他们在各自的领域里潜心钻研。

拼命地去做自己想做的事，他们只不过是在等候命运的安排的时候，没出什么差错罢了。

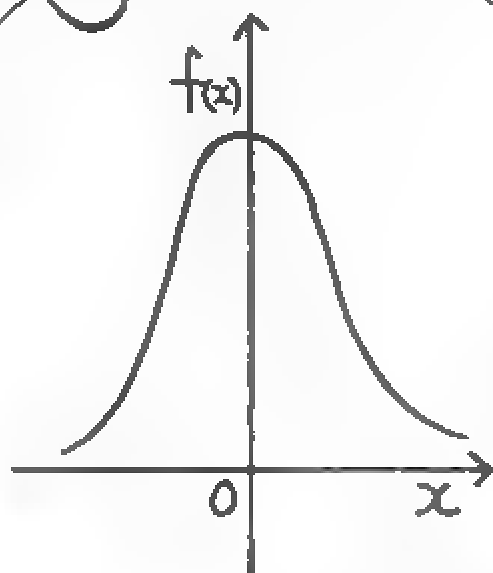


对了！说到概率！

呀！难道现在又要讲课了？

当然啦！我是教育专员，你是社里的宝贵财产。

在用概率来分析不确定性事件时，最常见到的就是“正态分布[1]”。



嗯、嗯！

所谓概率密度函数，就是平移之后同函数 $f(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 成比例的函数。$f(x)$的图形如这幅图 所画的一样，是关于y轴对称，形似“吊钟”或“头盔”的图形。

沙

沙

真对不起，这个人把它写满了，请再来些杯垫吧。

冒汗

很多不确定现象的数据分布都可以用这个图形估计，一个典型的例子，就是人和动物的身高都服从正态分布。

咔

在金融业中，人们相信股票的投资收益率也服从正态分布。

测量误差也服从这个分布。

还有，考试成绩的分布，也是由于这一原因，将成绩单按照正态分布划分成五个评价等级。

1 正态分布：Normal Distribution。

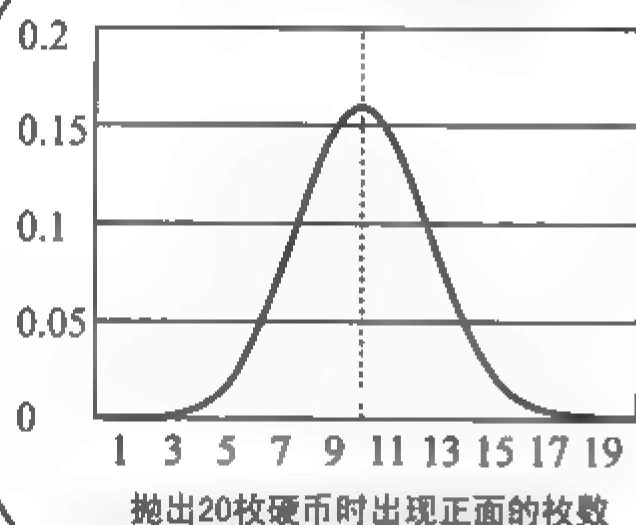
在此，为了让你便于理解，我们使用泰勒展开来说明一下投硬币这件事也是服从正态分布的。

抛出硬币后，出现正面的概率是？

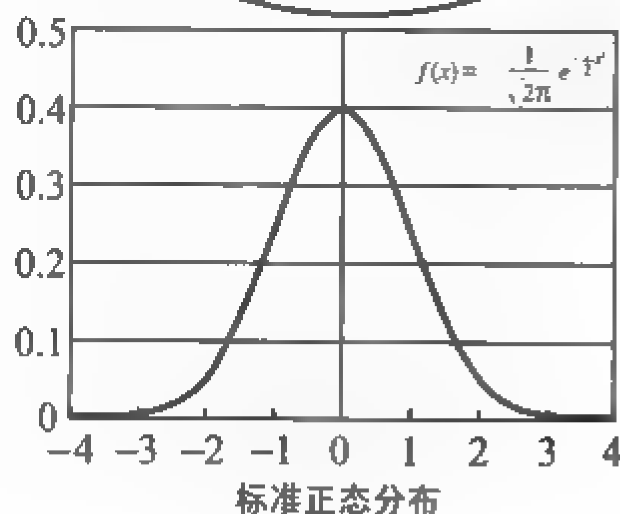
呼

连傻子都知道，是$\frac{1}{2}$！

是的，究竟出现哪面是不确定的，不过两个面出现的概率都一定是$\frac{1}{2}$。



上面这幅图就是一下子投出20枚硬币后，将出现正面的枚数作为横坐标，同时将出现该枚数的概率作为纵坐标画成的图。



啊，很像下面这幅图。

没错，正态分布的图形几乎都是可以重叠的。

实际上，将 $g_n(x)$ 定义为"投出n枚硬币时，出现正面的概率"※注1画出 $g_n(x)$ 的图形n趋近于+∞……

∞读作无穷大

$$f(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

那个式子刚刚老写过了，不必用到两个杯垫……

……完全和它成正例的函数图形。

※注1

投出n枚硬币后，可以用二项式分布来概括所有出现x枚正面的概率。
例如，求投出5枚硬币后，出现3枚正面的概率。
出现"正正反正反"的概率为

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

另外，这种情况有为 C_5^3 种，所以其概率为 $C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^5$。通常写作 $C_n^x\left(\frac{1}{2}\right)^n$。

用二项式分布将$g_n(x)$写作……

$$g_n(x) = C_n^x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}$$

$$= C_n^x\left(\frac{1}{2}\right)^n$$



……如上形式。

$f(x)$的图形以$x=0$为中心左右对称，$g_n(x)$的图形以$x=\frac{n}{2}$为中心左右对称。



以$g_n\left(\frac{n}{2}\right)$为基准重新做一下试试看。

首先……

$$g_n\left(\frac{n}{2}\right) = C_n^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

做除法……

$$h_n(x) = \frac{g_n(x)}{g_n\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{C_n^x}{C_n^{\frac{n}{2}}}$$

想想这个h_n

于是，有

$$g_n(x) = g_n\left(\frac{n}{2}\right) \times h_n(x)$$

可写作，

$$C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!},\quad C_n^{\frac{n}{2}} = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}$$

因此，

$$h_n(x) = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}{x!(n-x)!}$$


……
用了这么多


生气




嗯、接下来，由中心 $\frac{n}{2}$ 处开始以每 $\frac{\sqrt{n}}{2}$ 为一个单位，对 x 进行单位变换。
居然无视我……


$\frac{\sqrt{n}}{2}$ 为标准偏差。没学过统计的人就权且将它理解为一个咒语吧！
牟尼啊
咒语~

就是说，

$$x=\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}\times 1 \longrightarrow z=1$$

$$x=\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}\times 2 \longrightarrow z=2$$

$$x=\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}\times 3 \longrightarrow z=3$$

……以此类推，进行变量替换。



规定 z 满足 $\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}z=x$，并将其代入 h_n。

$$h_n(x)=\frac{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}{\left(\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)!\left(\frac{n}{2}-\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)!}$$

$$\left(n-\left(\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)\right)$$

两边取对数※注1。

$$\ln h_n(x)$$

$$=\ln\left(\frac{n}{2}\right)!+\ln\left(\frac{n}{2}\right)!-\ln\left(\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)!-\ln\left(\frac{n}{2}-\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)!$$

我们换个地方，再来计算这个吧！

※注1　此处使用 $\ln ab=\ln a+\ln b$

$\ln\frac{d}{c}=\ln d-\ln c$





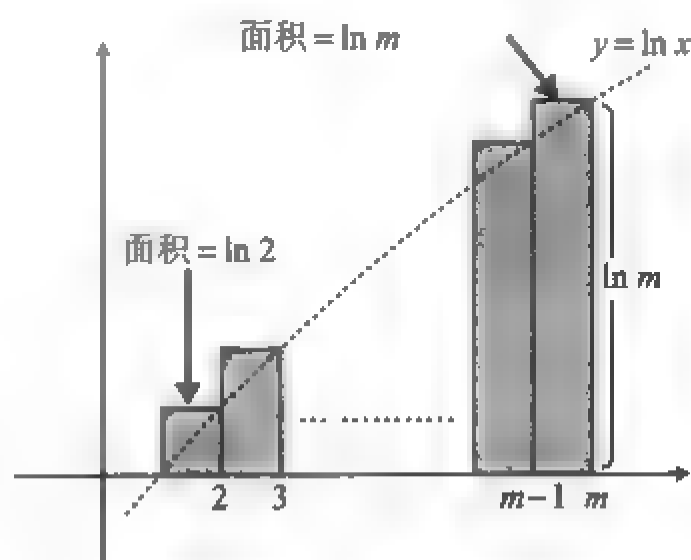




对 ln(*m*!) 做近似。

$\ln m! = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln m$

如右图所示，就是在 lnx 的图形下所覆盖的长方形的面积。



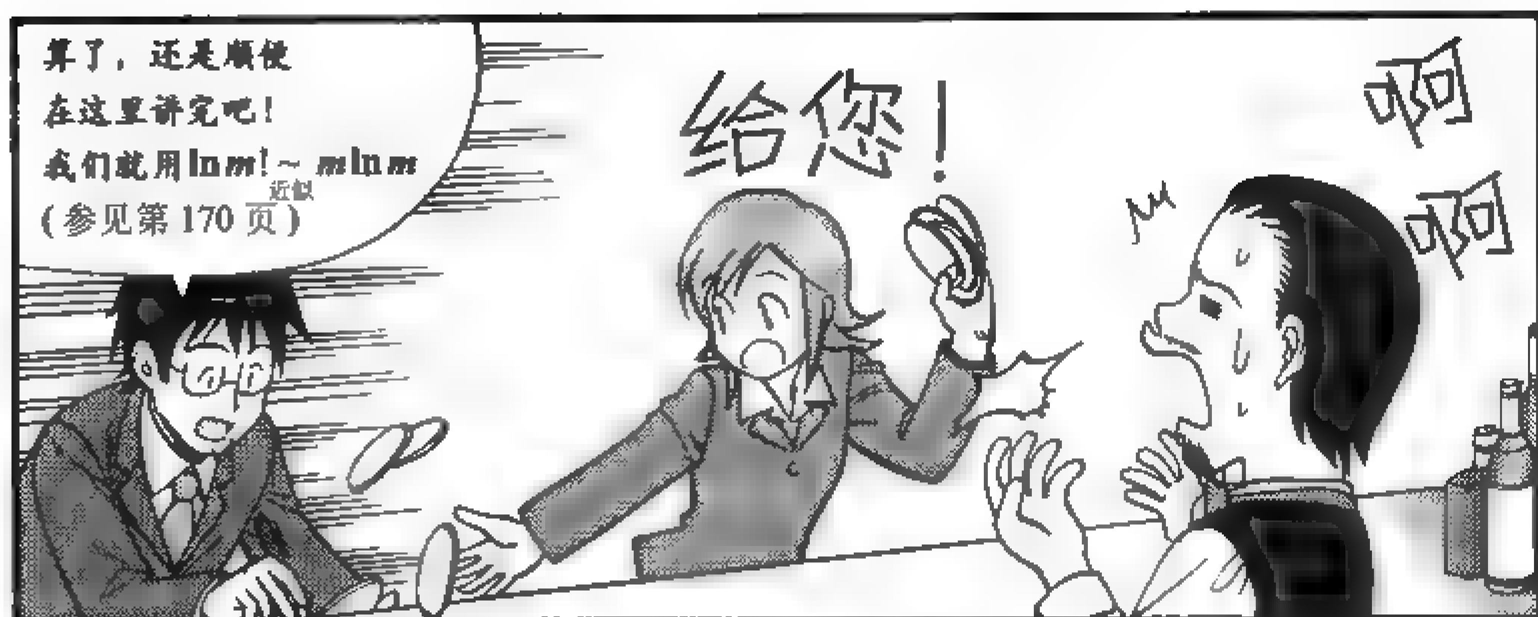
$$\ln 2 + \cdots + \ln m \underset{\text{近似}}{\sim} \int_1^m \ln x \, dx$$

$$(x \ln x - x)' = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$$

因此，

$$\begin{aligned} \int_1^m \ln x \, dx &= (m \ln m - m) - (1 \ln - 1) \\ &= m \ln m - m + 1 \\ &= m(\ln m - 1) + 1 \end{aligned}$$

所以，可以得到如此近似：$\ln m! \sim m \ln m$。



$$\ln h_n(x) \underset{近似}{\sim} \frac{n}{2}\ln\frac{n}{2}+\frac{n}{2}\ln\frac{n}{2}-\left(\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)\ln\left(\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)-\left(\frac{n}{2}-\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)\ln\left(\frac{n}{2}-\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)$$

整理，得

$$\ln h_n(x) \underset{近似}{\sim} -\left[\left(\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)\ln\left(1+\frac{\sqrt{n}}{n}z\right)+\left(\frac{n}{2}-\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)\ln\left(1-\frac{\sqrt{n}}{n}z\right)\right]$$

（上式经过了如此变形：$\ln\left(\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)=\ln\left\{\frac{n}{2}\left(1+\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)\right\}=\ln\frac{n}{2}+\ln\left(1+\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)$）







当 t 接近0时……

$$\ln(1+t)\sim t-\frac{1}{2}t^2$$

（二次近似）[1]

并且，若 n 的值非常大，$\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}$ 是相当接近0的。只要 z 为一个固定值，$\frac{\sqrt{n}}{n}z$ 也必定是接近0的。



所以，

$$\ln\left(1+\frac{\sqrt{n}}{n}z\right)\sim\frac{\sqrt{n}}{n}z-\frac{1}{2}\frac{1}{n}z^2$$

$$\ln\left(1-\frac{\sqrt{n}}{n}z\right)\sim-\frac{\sqrt{n}}{n}z-\frac{1}{2}\frac{1}{n}z^2$$

将它们代入，得

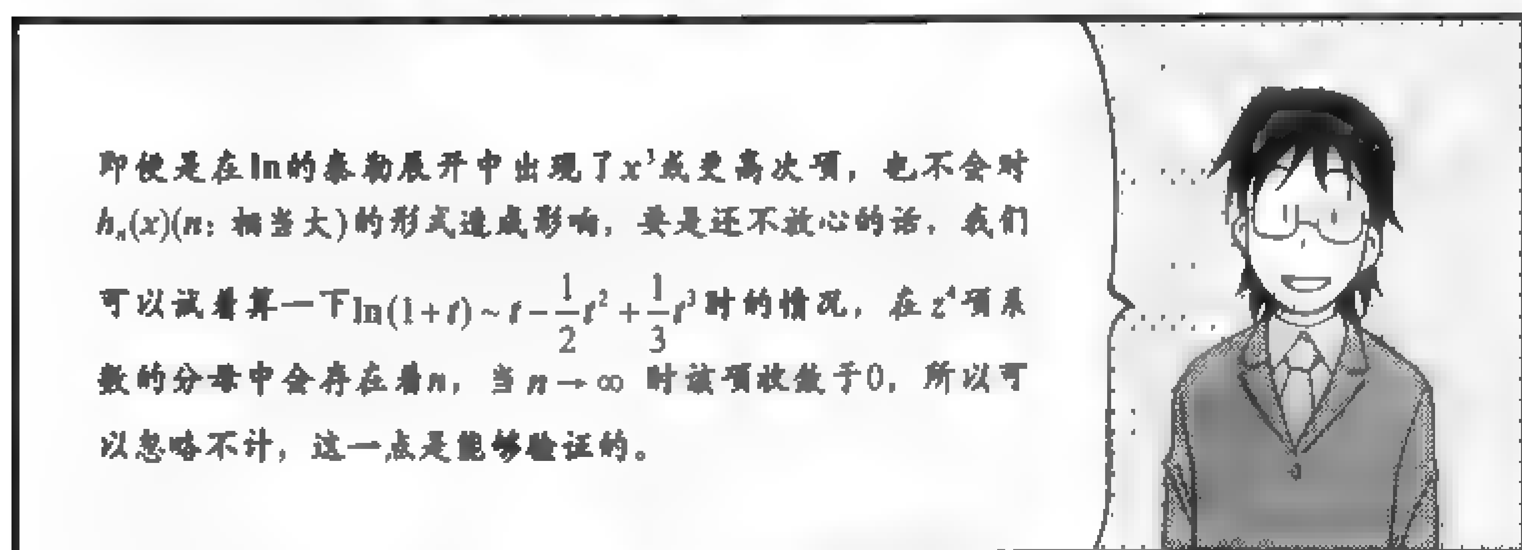
$$\ln h_n(x)\sim-\left\{\left(\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)\left(\frac{\sqrt{n}}{n}z-\frac{1}{2}\frac{1}{n}z^2\right)+\left(\frac{n}{2}-\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)\left(-\frac{\sqrt{n}}{n}z-\frac{1}{2}\frac{1}{n}z^2\right)\right\}$$

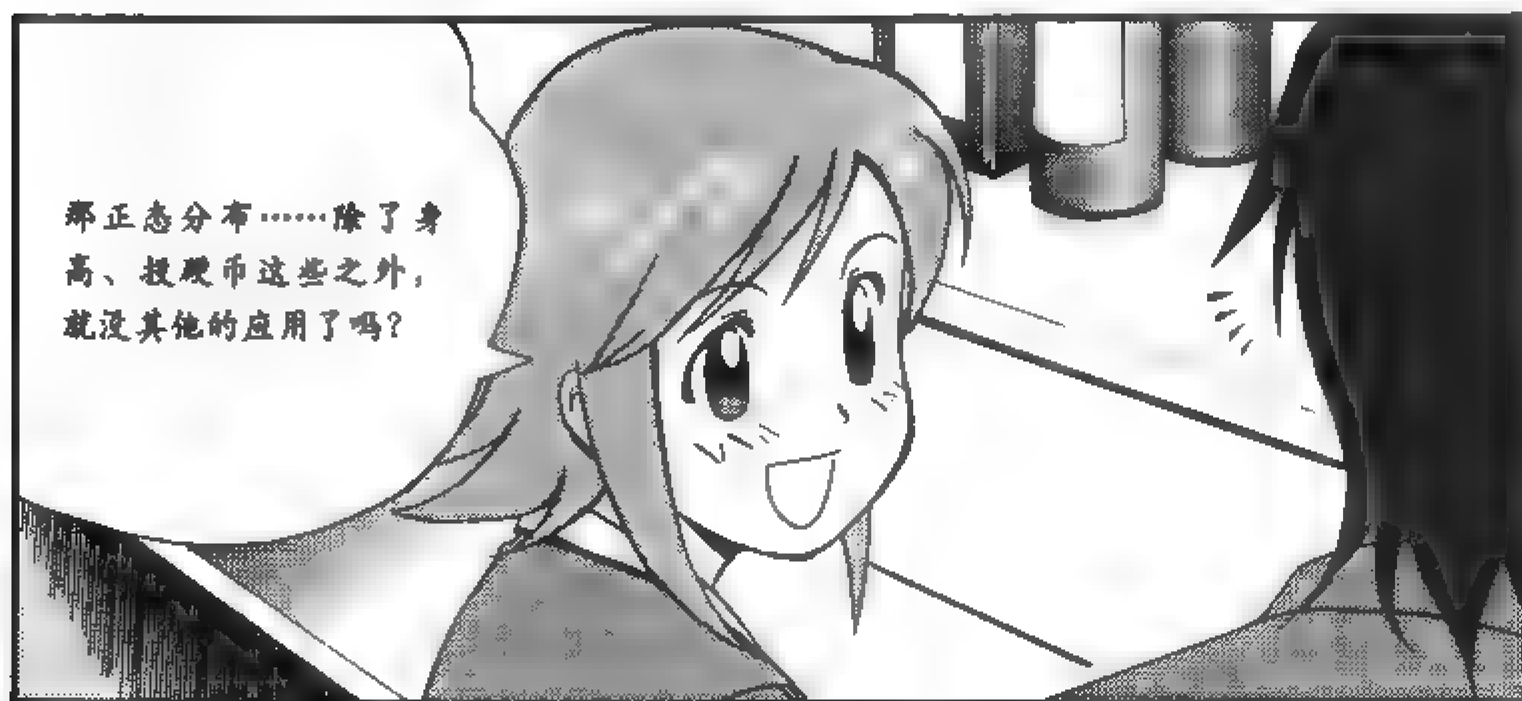
$$=-\left\{z^2-\frac{1}{2}z^2\right\}=-\frac{1}{2}z^2$$

---

1 参见第159页。

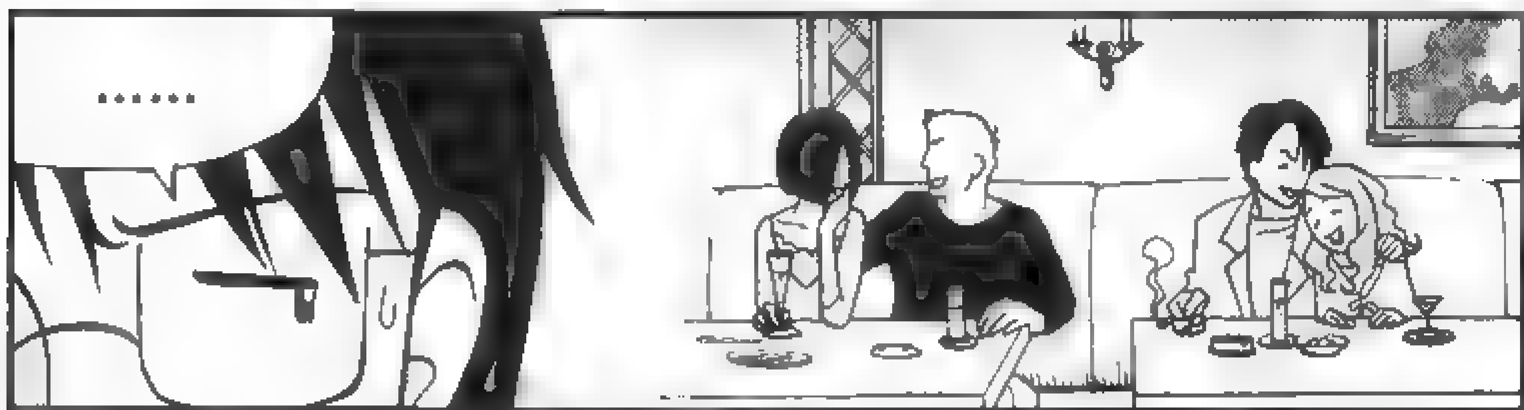

我们就能得出
$\ln h_n(x) \sim -\frac{1}{2}z^2$,
也可写作
$h_n(x) \sim -e^{\frac{1}{2}z^2}$,
完事大吉，
圆满收场。

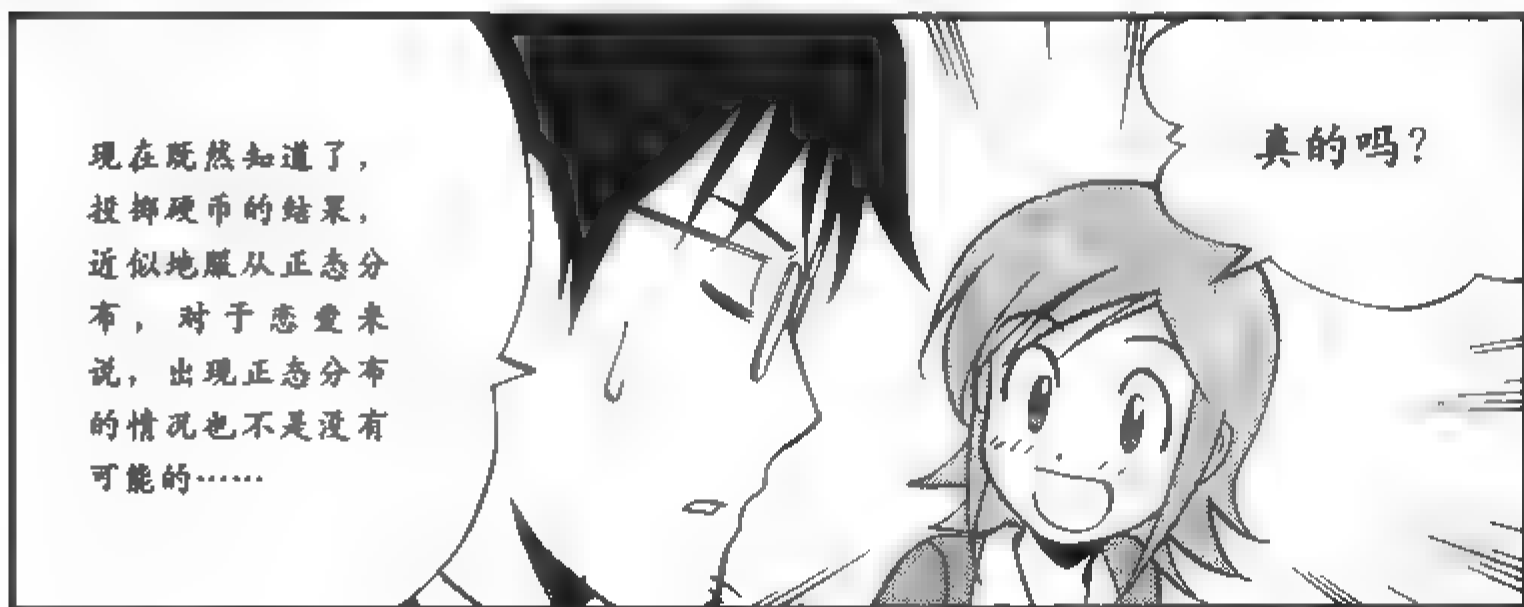

即使是在ln的泰勒展开中出现了x^3或更高次项，也不会对
$h_n(x)$(n：相当大)的形式造成影响，要是还不放心的话，我们
可以试着算一下$\ln(1+t) \sim t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3$时的情况，在$z^4$项系
数的分母中会存在着n，当$n \to \infty$时该项收敛于0，所以可
以忽略不计，这一点是能够验证的。


那正态分布……除了身
高、投硬币这些之外，
就没其他的应用了吗？

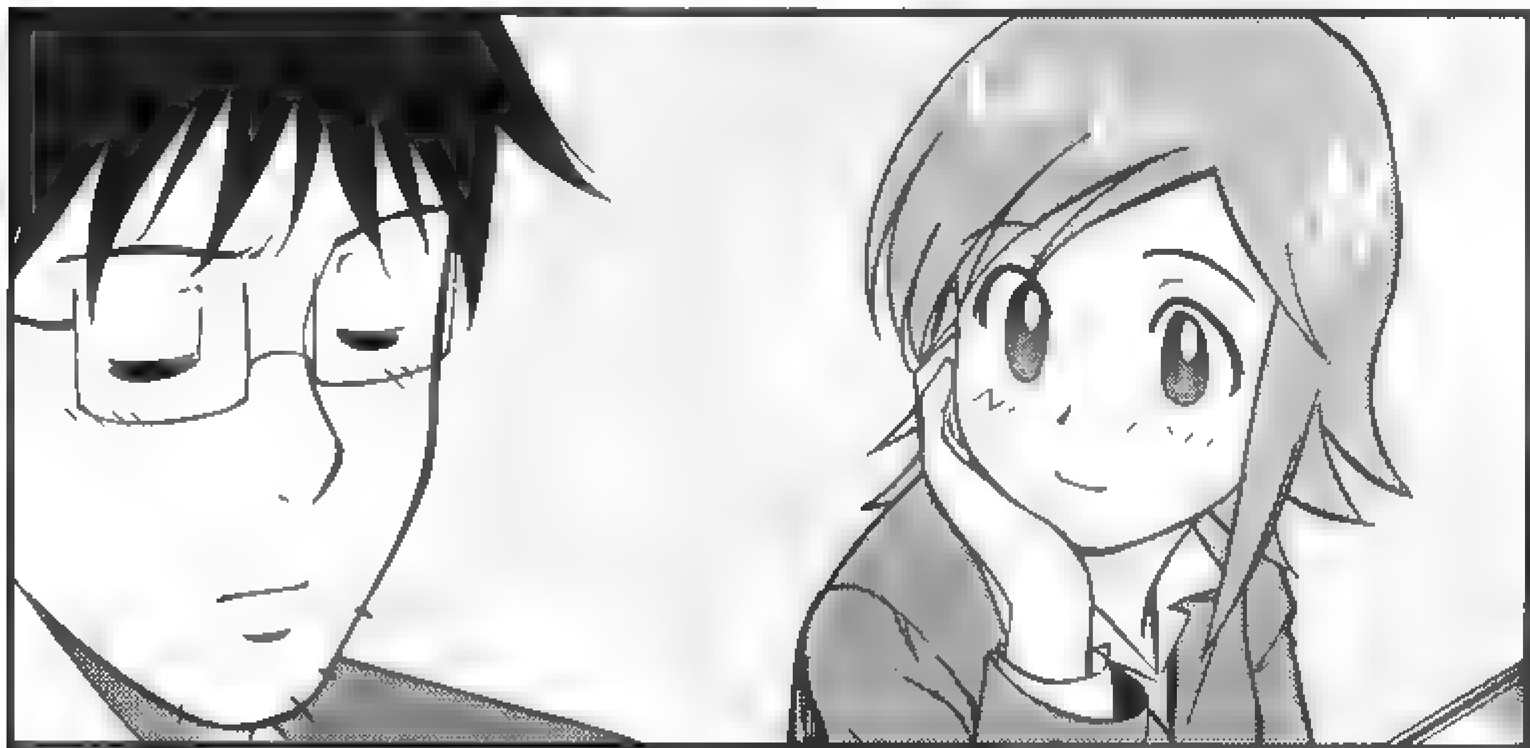

你不会是又想问它是否会适用于恋爱吧？当然不行，如果不是随机(Random)事件，就不可以……
那要是自然的纯真的爱情呢？


这个扯远了吧！
了解了吗？不要试图妄想这个世界上会发生"与无数次掷硬币后的结果相似的事件"。


……


现在既然知道了，投掷硬币的结果，近似地服从正态分布，对于恋爱来说，出现正态分布的情况也不是没有可能的……
真的吗？


不管怎么说，
它都只限于
那些随机的
不确定的现象。
不灵活运用
就会坏事的……
哎呀！




搞不懂你是怎么想的。
但是，关社长，说真的，您还真是个单纯的孩子……

第5章 本章习题

1. 求 $f(x)=e^{-x}$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开。

2. 求 $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$ 在 $x=0$ 处的近似二次函数。

3. 请自行推导一下漫画中出现的 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的泰勒展开公式。

   也就是求

   $f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots$

   时的 a_n。

第6章

从多个因子中
仅取其一即为偏微分



1 什么是多变量函数

什——么！！！

关社长要回总社!?

为什么？为什么要回去？

你为什么这么问……

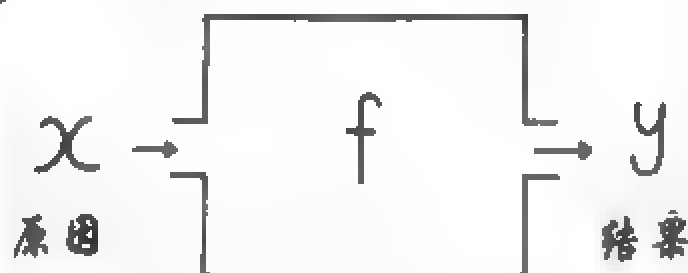
可是……
“一定是出于某种原因才会有这样的结果”……

这是记者每日必修的功课！是要时刻铭记的！

原因和结果……
哦，好怀念它们啊。记得当初是从它们开始学起的。

的确。到目前为止，我们所说的函数都是采用“一个原因、一个结果”这样的类型。

把它画成图，

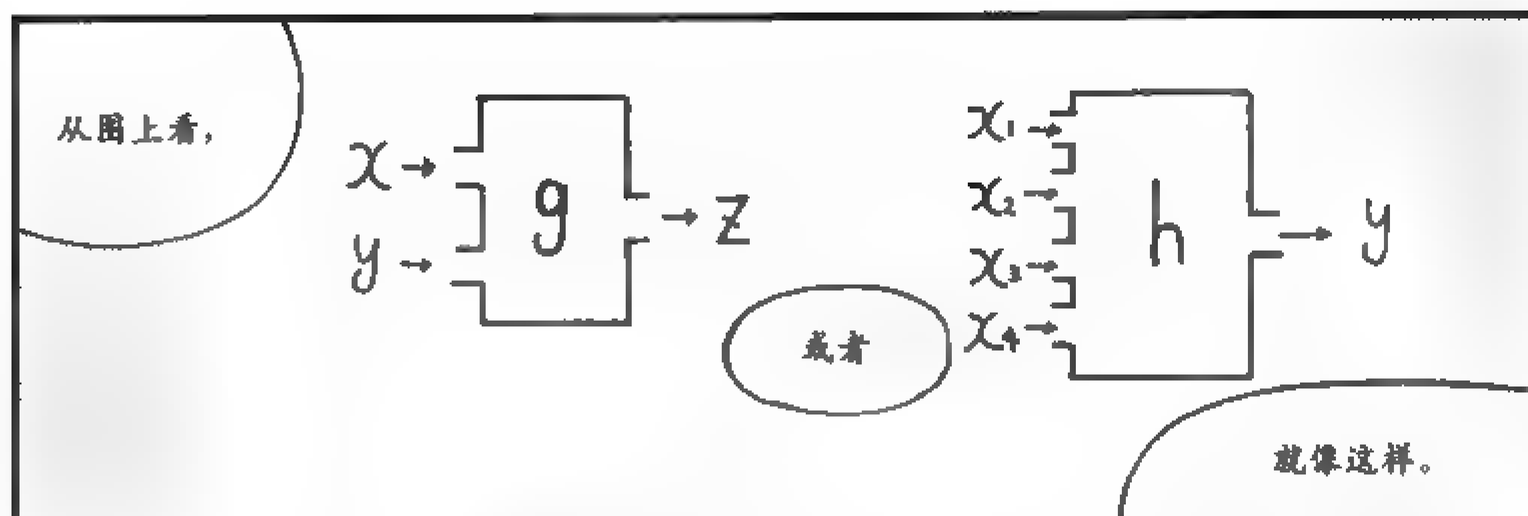


……就是这样了。

但是，世上的事物并不是如此简单的。我的此番调动，也让人琢磨不透。

啊？

这次大概是多个原因混在一起才会产生了总社调动这样的结果吧！


从图上看，
x
y
g
z
或者
x_1
x_2
x_3
x_4
h
y
就像这样。


就关社长而言，x是好文章，y是出色的表现，如此一来，才会有调去总社。
哎呀！还没弄清楚是怎么回事呢。


换成引间的话，x_1是上个月的差错，x_2是这个月的差错，结果就是要被炒鱿鱼啦。
生气


啊
收紧
好啦好啦！
我快要离开了，
正因为如此，
我们才要抓紧时间。
赶快把基础知识都掌握了。

如刚才所说，
左边的函数
可以记作
$z=g(x,y)$，
右边的函数
就可以记作
$y=h(x_1,x_2,x_3,x_4)$。



对于存在两个原因的函数(称为二元函数)，我们先来举几个例子。

◆1　以速度 v，将物体从地面向上抛出，t 秒后物体的高度为 $h(v,t)$。

于是，有 $h(v,t)=vt-4.9t^2$ (m)。

◆2　xg 水中能够溶解 yg 糖，糖水的浓度为 $f(x,y)$。

此时，$f(x,y)=\dfrac{y}{x+y}\times 100\%$。

◆3　某国家拥有机械设备 (称为资本) 的量为 K，劳动力的量为 L 时，能够生产的商品总量(GDP：国内生产总值) 就可以记为 $Y(L,K)$。



在经济学中，我们使用 $Y(L,K)=\beta L^{\alpha}K^{1-\alpha}$ (α,β 为常数)作为近似函数。
(称为：柯布-道格拉斯函数)
(参见第 201~203 页)

◆4　在物理学中，当理想气体的压力为 P，体积为 V 时，其温度 T 是一个关于 P 和 V 的函数。因此，我们可以将其写作 $T(P,V)$。于是，有

$$T(P,V)=\gamma PV \quad (\gamma \text{ 为常数})。$$

这个式子被称为“理想气体的状态方程”。

2 二元一次函数仍然是最基础的

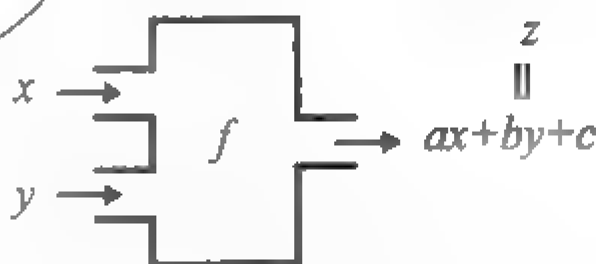
想一想，要如何来研究像例1~例4这样的复杂的二元函数的性质呢？

还是使用“近似一次函数”吗？

嗯

说的没错！可是现在是“二元函数”了，所以近似一次函数也一定是“二元”一次函数。

所谓二元一次函数就是形如 $z=f(x,y)=ax+by+c$ 的函数 (a, b, c 为常数)。



就是像 $z=3x+2y+1$ 或 $z=\ \ x+9y-2$ 这样的式子。

那么，思考一下要如何画出这些函数的图形呢？

输入的是两个变量 (x 和 y)，输出的是一个变量 (z)，所以理所当然要使用“三维坐标系”。

嗯—

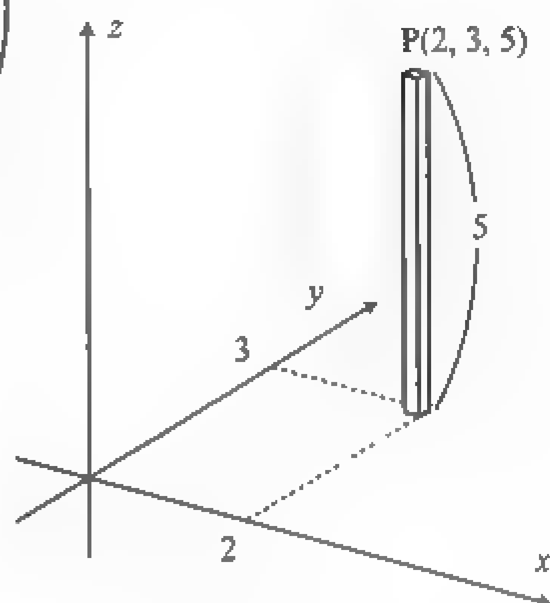
嗯——把 $x-y$ 平面想象成地面，z 轴想象成柱子就可以了。

柱子……

为什么要这么做？

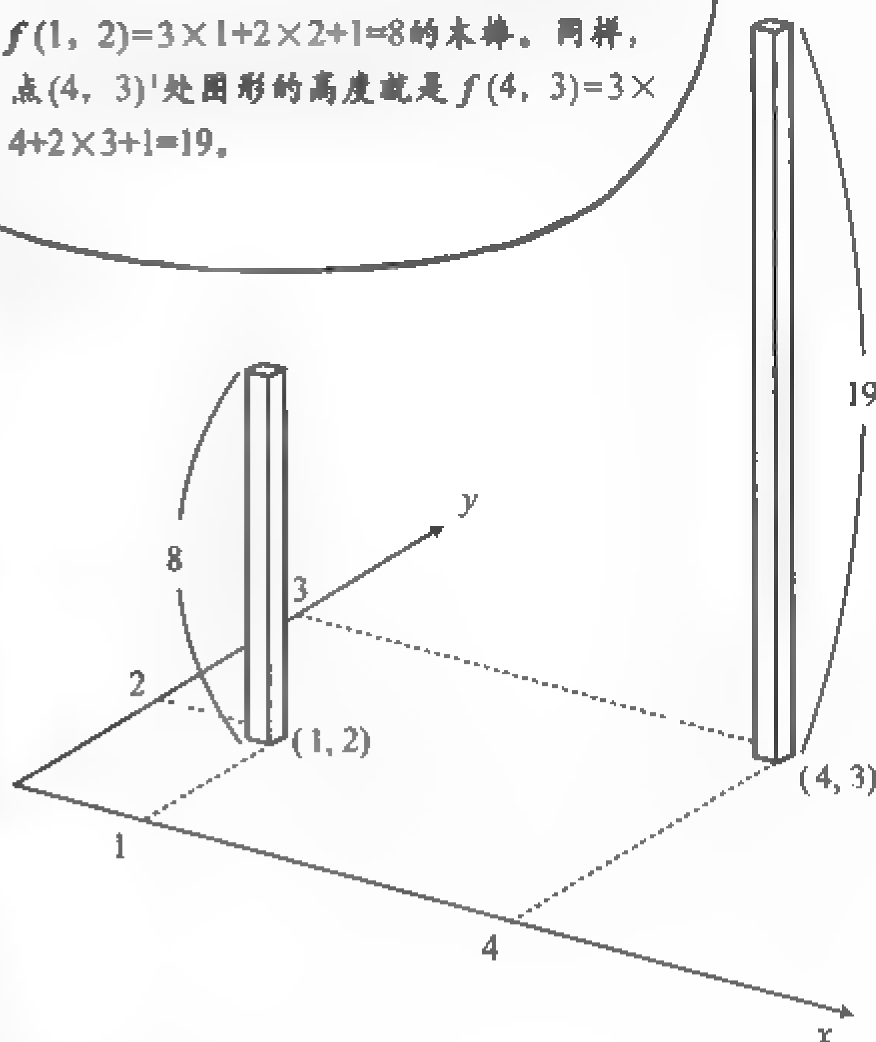
嗯？哎呀，咱们再接着讲。

瞧！坐标为(2, 3, 5)的点P，在图中就是在“地面”(2, 3)的地方所立起的高为5的木棒的顶点。

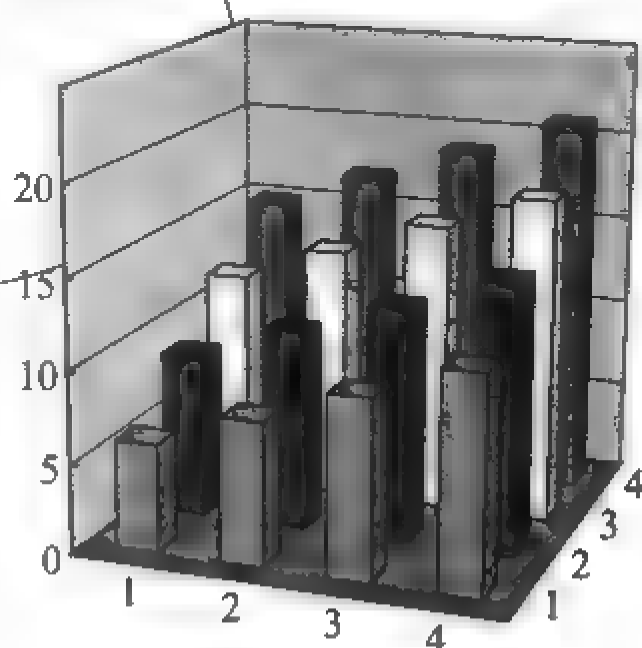


那么，再考虑一下，在三维坐标系中，要如何画出二元一次函数 $z=f(x,y)=ax+by+c$？

例如，你就试着画一下 $z=f(x,y)=3x+2y+1$ 的图形吧。



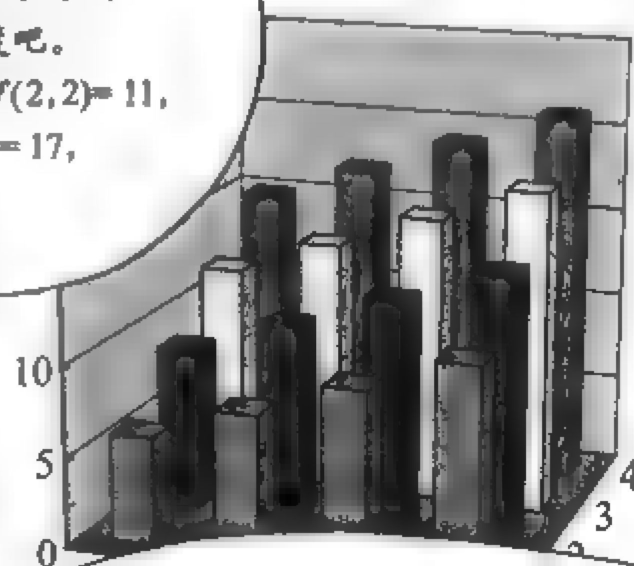
1 其实应该写作(4, 3, 0)，不过为了便于理解先写作(4, 3)。


同样，在$1\leqslant x\leqslant 4, 1\leqslant y\leqslant 4$
范围内的
16个(x,y)点处
都立起木棒，
就是这个图。
20
15
10
5
0
1
2
3
4
1
2
3
4


一看到这个，
就隐约觉得
函数的图形
是一个平面，
对不对？
还真是这样。


首先，来考虑一下，
最前排的柱子，
是如何出现的吧。
从左边起高度依次为
$f(1,1)=6$，$f(2,1)=9$，
$f(3,1)=12$，$f(4,1)=15$。


这是一条斜率为3的直
线，只要将$y=1$代入，
$z=f(x, y)$
$=3x+2y+1$，
自然就会得到
$z=3x+2x+1$，
$3x+3$。


然后，再看一下这些柱子之
后邻近的柱子的高度吧。
高度为$f(1,2)=8$，$f(2,2)=11$，
$f(3,2)=14$，$f(4,2)=17$，
可以看出仅仅
比前一排
高出了2。
10
5
0
4
3
并且，再下一排中的柱子的高度
$f(1,3)=10$，$f(2,3)=13$，
$f(3,3)=16$，$f(4,3)=19$，
仍然比前一排中的柱子高出2。

总之，这些柱子从纵向看去，每一排都增高2个单位。



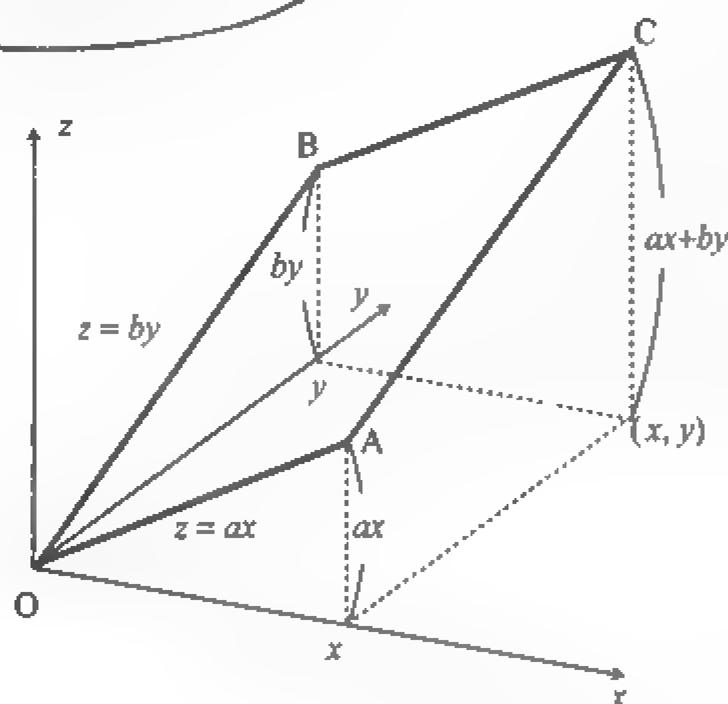
整体看来，就会明白，柱子的顶端可以画作平面。把以上内容总结一下——

首先，画出 $z=f(x, y)=ax+by$ (设常数项 c 为0)。

在 x 轴上方的 $f(x, y)$ 的图形，就是将0代入 y 后，所得的 $z=ax$。这是一条经过原点，斜率为 a 的直线OA。

在 y 轴上方的，$f(x, y)$ 的图形，就是代入 $x=0$ 后，所得的 $z=by$。这是一条经过原点，斜率为 b 的直线OB。

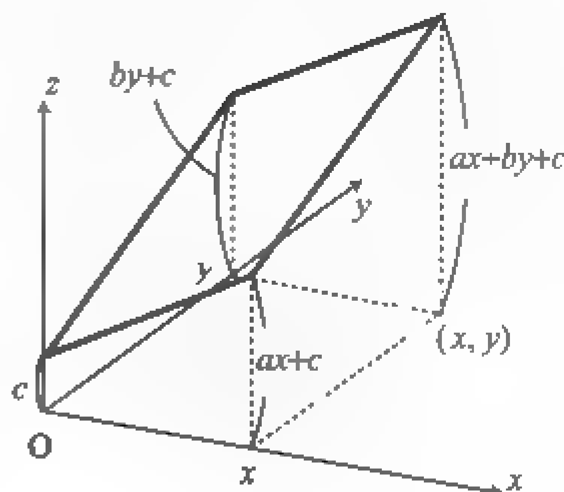
于是，$f(x, y)$ 的图形就会变成将OA和OB贴上布后绷紧了的帐篷(平面OACB)。



平行四边形OACB的点C就是图形在地面(x, y)处上方的点，高度恰为$z=ax+by$。

接下来，对于一般的 $z=g(x, y)=ax+by+c$ 的图形，只需将目前的图形向上抬起 c 个单位就可以了。它就是一个经过原点上方 $(0, 0, c)$ 的平面。



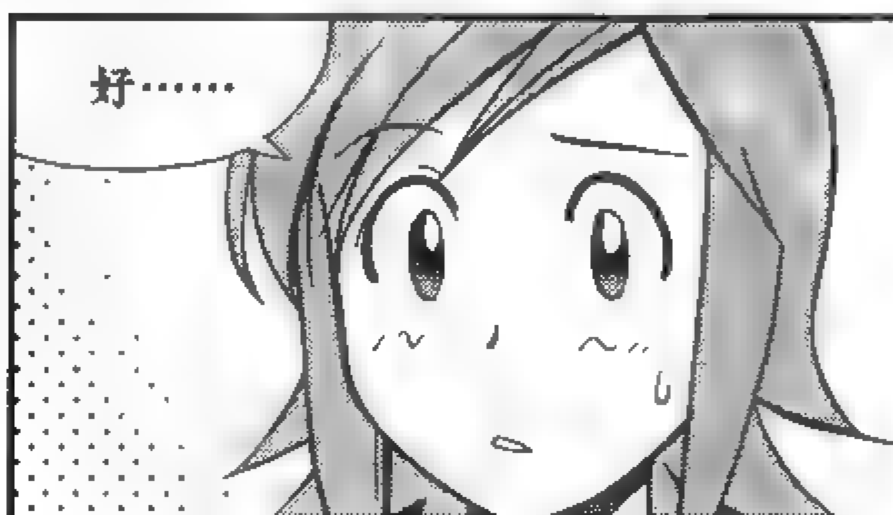


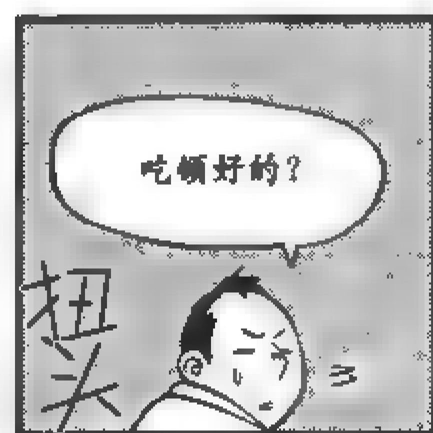

引间！
是!!


今天我们就
到此为止吧！
你好像有点
心不在焉啊。
郁闷
才没有呢


还有些工作要赶紧做完，我们这个星期日再碰个面怎么样？


尽管很想休息，但还是把最后的讲完吧！补习结束之后，请你吃顿好的。

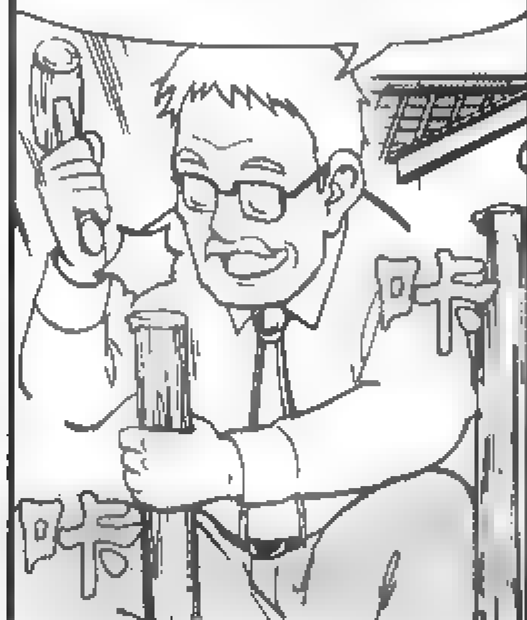

好……


吃顿好的？
扭头

中学
星期日

这所学校几年前
就已经停办了。
我就是在这里
学习的数学。
啊？
连停办的学校
也可以来访吗？
啊！？
其实，我就是本地人。
以前，这里是一个非常小的学校。
但是……
即使是如此小的地方，也有世界
一流的授课教师。

在三维坐标系中，
二元函数
$z=f(x,y)=3x+2y+1$
要怎样画啊？



正好可以以这块草席
来做平面OACB……

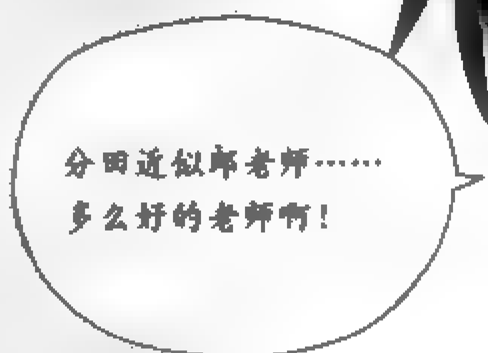


老师，草席里还有
剩下坐芋头呢，怎
么办？



解决这个问题后，
把它们蒸着吃了不就行了嘛。
哈哈哈哈~







3 二元函数的微分叫做偏微分

	时间表
1	偏微分
2	
3	

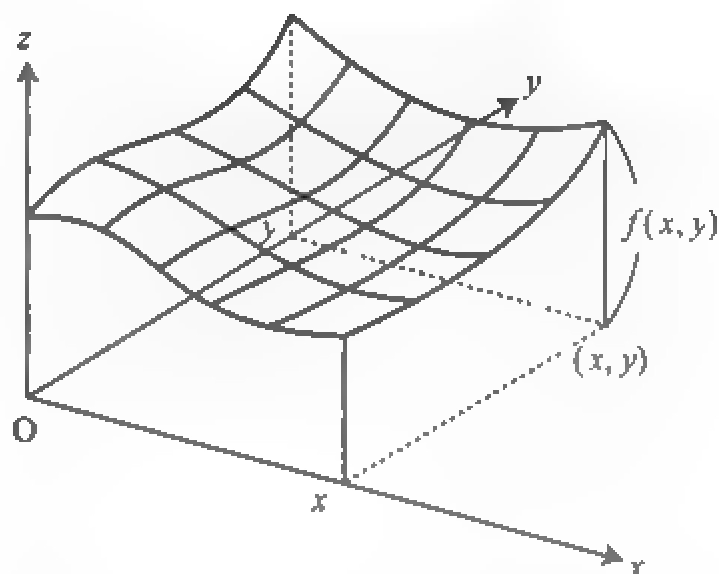


第一节课我们讲二元函数的微分。

当当当…

我们已经学过了二元一次函数，那么二元函数的微分仿照一元函数的微分进行就可以了。

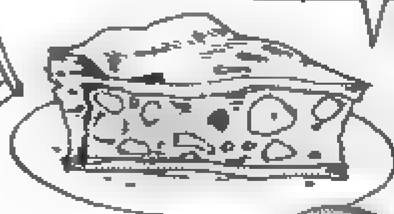
二元函数的图形是一个“曲面”。



可以看做一个松弛的帐篷。

不对、不对，应该看成水果蛋糕。









呃，无论看成哪个都好，我们来做一下，在点(a, b)（也就是$x = a$, $y = b$）附近，$f(x, y)$的“近似二元一次函数”吧。



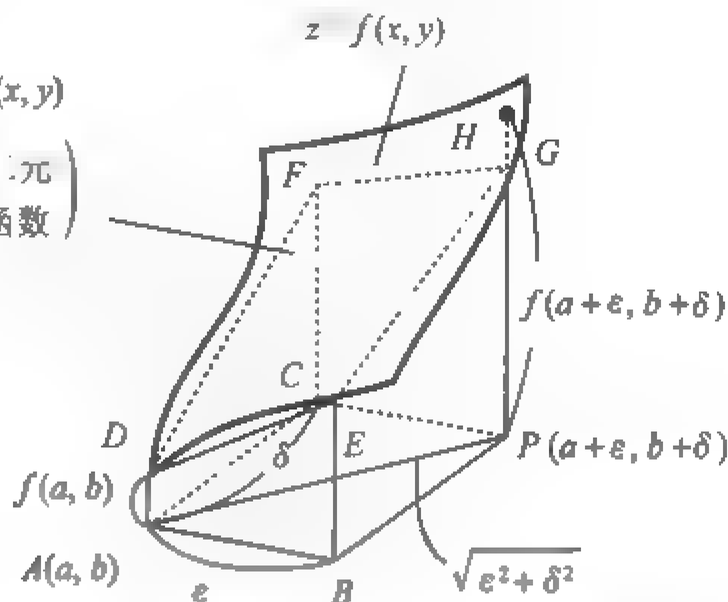
在点(a,b)处，作一个与$f(a,b)$高度一致的二元一次函数。将它记为

$$L(x,y)=p(x-a)+q(y-b)+f(a,b)。$$

将a代入x，将b代入y后，

就可以得到

$$L(a,b)=f(a,b)。$$



现在，$z=f(x,y)$的图形和$z=L(x,y)$的图形，都经过点$A(a,b)$上方同样的点，但是在点A以外的点$P(a+\varepsilon,b+\delta)$，两者的高度自然就有所差异了。这个误差为

$$f(a+\varepsilon,b+\delta)-L(a+\varepsilon,b+\delta)=f(a+\varepsilon,b+\delta)-f(a,b)-(p\varepsilon+q\delta),$$

将它同A到P的距离AP做比，所得到的比值的多少，就是"误差率"。

$$(\text{误差率})=\frac{(f\text{和}L\text{的差})}{AP\text{间的距离}}$$

$$=\frac{f(a+\varepsilon,b+\delta)-f(a,b)-(p\varepsilon+q\delta)}{\sqrt{\varepsilon^2+\delta^2}} \quad \text{——①}$$

其中，点P仅限于是存在于点A的附近的点，就是说只有同f的差值近似于0的函数$L(x,y)$，才能看作是"近似一次函数"。这样，我们只要求出p和q就可以了。p就是直线DE的斜率，q就是直线DF的斜率。

式中的ε和δ为任意实数。那么，我们首先令$\delta=0$，来作一下分析吧。式①可以变为如下形式。

$$(\text{误差率})=\frac{f(a+\varepsilon,b+0)-f(a,b)-(p\varepsilon+q\times 0)}{\sqrt{\varepsilon^2+0^2}}$$

$$=\frac{f(a+\varepsilon,b)-f(a,b)}{\varepsilon}-p$$

1. 误差率：Error Ratio。

因此，当“$\varepsilon\to0$”时，也就意味着“误差率→0”，也就是

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{f(a+\varepsilon,b)-f(a,b)}{\varepsilon}=p \quad ——②$$

所得结果就是 DE 的斜率。

此时，我们可以看出上式的左边与“一元函数微分”是一回事。也就是说，将 b 代入 $f(x,y)$ 中的 y，固定之后，得到的“只关于 x”的函数 $f(x,b)$。对于这个函数在 $x=a$ 处求微分系数的计算，就如同式②的左边一样。

看到左边进行的运算是微分，就不假思索地要写作 $f'(a,b)$，可是，如此一来，我们也不知道 f 是关于 x 和 y 中的哪一个进行的微分。

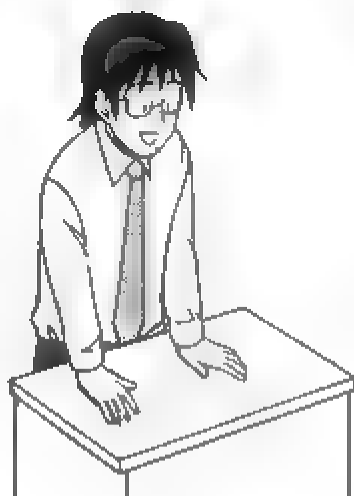
所以，将“把 y 固定在 b 后，在 $x=a$ 处求得的 f 的微分系数”记为 $f_x(a,b)$。这个 f_x 被称为“f 在 x 方向的偏微分系数”。它替代了一元函数微分中的“撇号”。

同 $\frac{df}{dx}$ 这种书写方法相对应的符号，我们使用 $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$。

总结一下，我们得到如下结论。

“把 y 固定在 b 后，在 $x=a$ 处求 x 方向的偏微分系数”

$$f_x(a,b)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\left(\text{也可写作}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{x=a,y=b}\right)$$
$$=DE\text{的斜率}$$



∂读作“round”。

完全相同的道理，我们也可以得到一下结论。

“把 x 固定在 a 后，在 $y=b$ 处求 y 方向的偏微分系数”

$$fy(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\left(\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{x=a,y=b}\right)$$
$$=DF\text{的斜率}$$

通过以上讲解，我们可以得出以下结论。

只要$z=f(x,y)$在$(x,y)=(a,b)$的附近存在近似一次函数，它就可以写成如下形式。

$$z=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+f(a,b) \quad \text{——③}$$

$$\left(\text{或写作 } z=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)+f(a,b)\right)^{\text{※注1}}$$

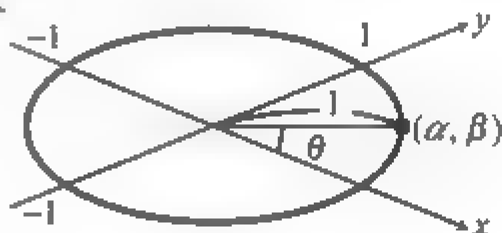
※注1

当AP→0时，在x方向和y方向上，可以求出近似一次函数的误差率为0。但是，对于这样求出的系数$f_x(a,b)$和$f_y(a,b)$而构造的函数，当AP→0时，是否在“任意方向上”都有误差率→0，我们仍不清楚。尽管不是很严谨，我们还是再尽力求证一下。

在x-y平面(地面)上，以原点为中心，以1为半径的圆上有一点(α,β)。于是有$\alpha^2+\beta^2=1$(也可以写作$\alpha=\cos\theta$、$\beta=\sin\theta$)。

求一下点(0，0)到点(α,β)方向上的微分系数。在这个方向上，移动长度t后就有$(a,b)\to(a+\alpha t,b+\beta t)$。

只要设式①中的$\varepsilon=\alpha t$、$\delta=\beta t$，就有



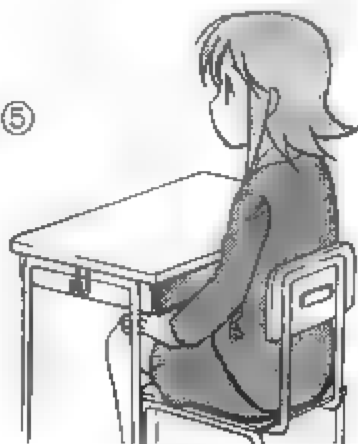
$$(\text{误差率})=\frac{f(a+\alpha t,b+\beta t)-f(a,b)-(p\alpha t+q\beta t)}{\sqrt{\alpha^2t^2+\beta^2t^2}}$$

$$=\frac{f(a+\alpha t,b+\beta t)-f(a,b)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\ t}-p\alpha-q\beta$$

$$=\frac{f(a+\alpha t,b+\beta t)-f(a,b)}{t}-p\alpha-q\beta \quad \text{——④}\ (\text{由于}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=1)$$

在此，令$p=f_x(a,b)$，$q=f_y(a,b)$，就可以将上式作如下变形。

$$④=\frac{f(a+\alpha t,b+\beta t)-f(a,b+\beta t)}{t}+\frac{f(a,b+\beta t)-f(a,b)}{t}-f_x(a,b)\alpha-f_y(a,b)\beta \quad \text{——⑤}$$



同时，只关于x的函数$f(x,b+\beta t)$中，在$x=a$处的微分为

$f_x(a,b+\beta t)$，

所以，由“一元函数的近似一次函数”可得

$f(a+\alpha t,b+\beta t)-f(a,b+\beta t)\sim f_x(a,b+\beta t)\,\alpha t$。

同理，对于y来说有

$$f(a, b+\beta t)-f(a, b) \sim f_y(a, b)\beta t$$

将它们代入⑤可得，

$$⑤ \sim f_x(a, b+\beta t)\alpha+f_y(a, b)\beta-f_x(a, b)\alpha-f_y(a, b)\beta$$

$$=(f_x(a, b+\beta t)-f_x(a, b))\alpha$$

只要 t 非常接近 0 的话，就会有 $f_x(a,b+\beta t)-f_x(a,b) \sim 0$，

误差率=⑤～0，所以，这就表示“无论在哪个方向上，当AP→0 时，都有误差率→0”。

此外，对于 $f_x(a,b+\beta t)-f_x(a,b) \sim 0(t \sim 0)$ 而言，f_x 的“连续性”是十分必要的。如果没有连续性，f_x 和 f_y 也就不存在，也就不知道所有方向上的微分系数是否都存在。不过，这类函数属于特殊函数，在本书中不作介绍。

[计算实例]

求例 1 中的函数 $h(v,t)=vt-4.9t^2$，在 $(v,t)=(100,5)$ 处的偏微分系数。

在 v 方向，对 $h(v,5)=5v-122.5$ 进行微分，则

$$\frac{\partial h}{\partial v}(v, 5)=5，所以$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(100, 5)=h_v(100, 5)=5$$

在 t 方向，对

$h(100,t)=100t-4.9t^2$ 进行微分，则

$$\frac{\partial h}{\partial t}(100, t)=100-9.8t$$



所以，$\frac{\partial h}{\partial t}(100, 5)=h_t(100, 5)=100-9.8\times 5=51$

近似一次函数为 $L(x,y)=5(v-100)+51(t-5)-377.5$

一般地，$\frac{\partial h}{\partial v}=t$, $\frac{\partial h}{\partial t}=v-9.8t$

因此，对于在 (v_0,t_0) 附近的 (v,t)，有

$$h(v,t) \underset{近似}{\sim} t_0(v-v_0)+(v_0-9.8t_0)(t-t_0)+h(v_0,t_0)$$

再接着做一下例 2 吧。

$$f(x,y)=\frac{100y}{x+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_x=-\frac{100y}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=f_y=\frac{100(x+y)-100y\times 1}{(x+y)^2}=\frac{100x}{(x+y)^2}$$

因此，对于在(a,b)附近的(x,y)，有

$$f(x,y)\underset{\text{近似}}{\sim}-\frac{100b}{(a+b)^2}(x-a)+\frac{100a}{(a+b)^2}(y-b)+\frac{100b}{a+b}$$

偏微分的定义

函数$z=f(x,y)$，在某个邻域内的所有点(x,y)都可以关于x进行偏微分时，在点(x,y)处，关于x的偏微分系数$f_x(x,y)$所对应的函数

$(x,y)\to f_x(x,y)$

被称为$z=f(x,y)$**关于x的偏导数**[1]。

可以用以下方式表示，

$$f_x, f_x(x,y), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}\text{等。}$$

同样地，在这个邻域内的所有点(x,y)都可以关于y进行偏微分时，所对应的

$(x,y)\to f_y(x,y)$

被称为$z=f(x,y)$**关于y的偏导数**。

可以用以下方式表示，

$$f_y, f_y(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y}\text{等。}$$

求偏导数的过程叫做**偏微分**。

1 偏导数：Partial Derivatives。

4 如何理解全微分



第二节 全微分

由 $z=f(x,y)$ 在 $(x,y)=(a,b)$ 处的近似一次函数可知

$$f(x,y)\underset{近似}{\sim} f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(x-b)+f(a,b)。$$

可以将它改写为：

$$f(x,y)-f(a,b)\underset{近似}{\sim}\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \qquad —— ⑥$$

$f(x,y)-f(a,b)$ 就意味着，当点由 (a,b) 向 (x,y) 变化时，高度 $z(=f(x,y))$ 的增量，效仿一元函数的情况写作 Δz。另外，$x-a$ 为 Δx，$y-b$ 为 Δy。

此时，式⑥可以写作

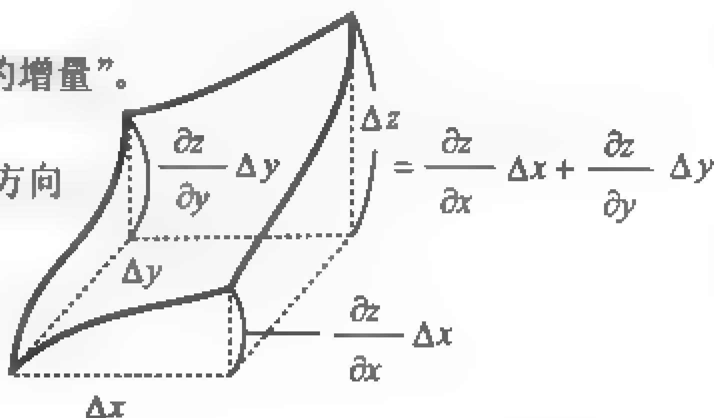
$$\Delta z\underset{近似}{\sim}\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y \qquad —— ⑦$$ （$x\underset{近似}{\sim}a$，$y\underset{近似}{\sim}b$）时，这个式子意味着：

"对于函数 $z=f(x,y)$，当 x 由 a 增加了 Δx、y 由 b 增加了 Δy 后，z 就相应增加了 $\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$"。

$\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x$ 表示"y 固定在 b 时 x 方向上的增量"，

$\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ 表示"x 固定在 a 时 y 方向上的增量"。

说明"$z(=f(x,y))$ 的增量可以分解为 x 方向上的增量与 y 方向上的增量之和"。



将这个式⑦作理想化(瞬时化)处理，得

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \qquad ——⑧$$

或者

$$df = f_x dx + f_y dy \qquad ——⑨$$

(Δ换作d)



这一过程用语言描述就是

(曲面高度的增量)=(x方向上的微分系数)×(x方向上的增量)

+(y方向上的微分系数)×(y方向上的增量)。

试着求一下“例4”中的全微分式吧。

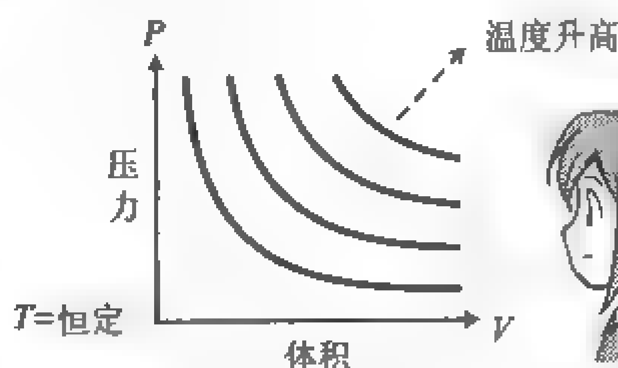
进行适当的单位变换后，状态方程就可以写作 $T=PV$。

$$\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{\partial (PV)}{\partial P} = V, \quad \frac{\partial T}{\partial V} = \frac{\partial (PV)}{\partial V} = P$$

因此，全微分式写作 $dT = VdP + PdV$。

若写回成近似公式就是 $\Delta T \underset{近似}{\sim} V\Delta P + P\Delta V$。

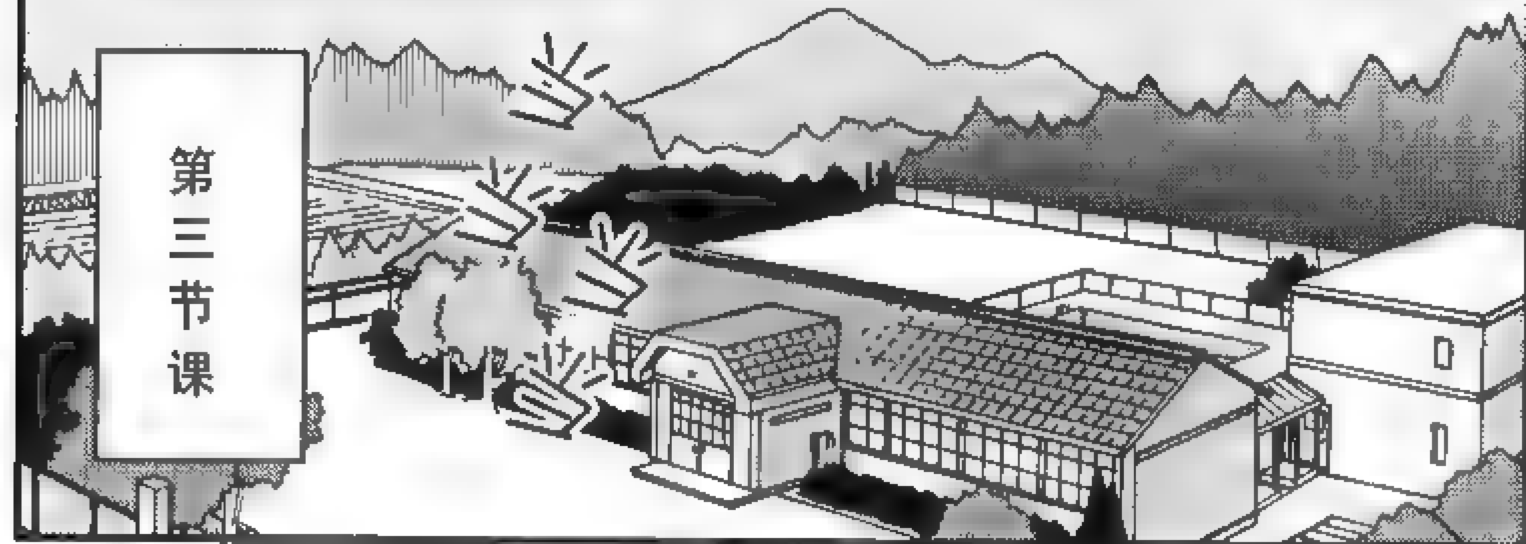






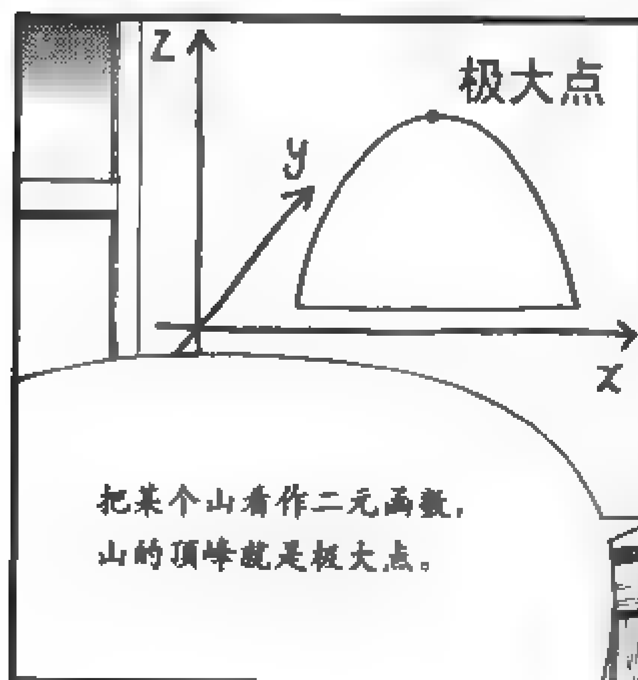
1 全微分：Total Differetial。

5 对极值条件的应用


第三节课

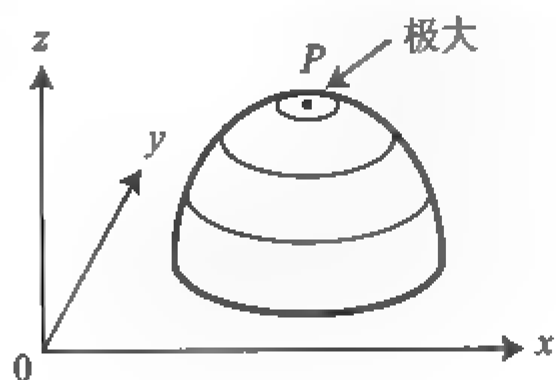


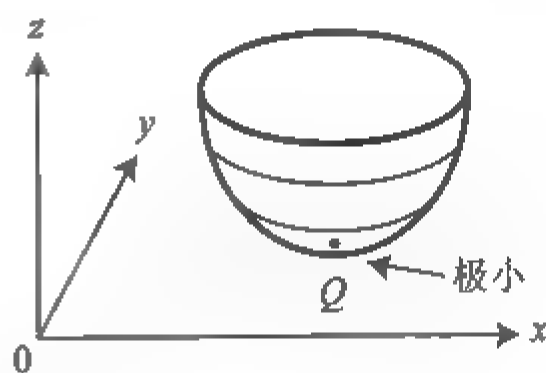

真好啊，
算田镇……
同以前比，
没怎么变样。
！

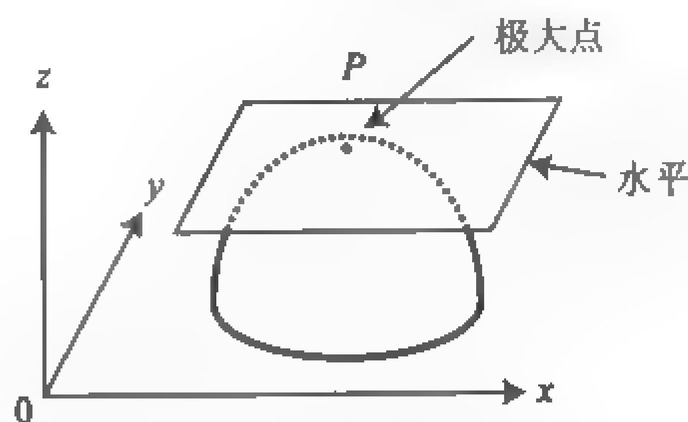

z
y
x
极大点
把某个山看作二元函数，
山的顶峰就是极大点。


啊！
又开始讲课了……
无力

对于二次函数 $f(x,y)$ 来说，所谓极值，就如同是图形处于山的顶峰或谷底时。







此时，在 P 点或 Q 点处所接触的平面是一个与平面 x-y 平行的平面，则对于近似一次函数 $\underset{\text{近似}}{f(x,y)} \sim p(x-a)+q(y-b)+f(a,b)$ 来说，应该有 $p=q=0$。

由于，其中 $p=\dfrac{\partial f}{\partial x}(=f_x)$，$q=\dfrac{\partial f}{\partial y}(=f_y)$，所以极值条件[※注1]为：

若函数 $f(x,y)$ 在 $(x,y)=(a,b)$ 处取极值，则有

$$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0,$$

或者

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0。$$

※注1　这个条件反过来是不成立的。也就是说，由 $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$，并不能说明在 $(x,y)=(a,b)$ 处 f 取得极值。所以说，满足这个条件的只不过是“极值的候选人”。



试求出 $f(x,y)=(x-y)^2+(y-2)^2$ 的极小值。先来说一下以往的解答。

$(x-y)^2 \geqslant 0$，$(y-2)^2 \geqslant 0$，所以

$$f(x,y)=(x-y)^2+(y-2)^2 \geqslant 0。$$

将$x=y=2$代入上式，得

$$f(2,2)=(2-2)^2+(2-2)^2=0，$$

由此可知，对于任意的(x,y)都有 $f(x,y) \geqslant f(2,2)$。也就是说，当 $(x,y)=(2,2)$ 时，$f(x,y)$ 取极小值 0。

同时，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=2(x-y)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2(x-y)(-1)+2(y-2)=-2x+4y-4，$$

由于 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$，所以可以得出

$$\begin{cases} 2x-2y=0 \\ -2x+4y-4=0 \end{cases}$$

解这个联立后的方程组，的确可以得出 $(x,y)=(2,2)$。



6 将偏微分用于经济学

在美国伊利诺伊州所选举出的上院议员中，有一位名叫保罗•道格拉斯的人，他于1949年至1966年担任议员。

实际上，此人原本是名经济学家。在1927年就已经在思考按照资本和劳动分配国民收入的问题。

那究竟要如何分配呢？

国民生产总值(GDP)表示一年之中，国内所生产产品的量，将它分配给国民的途径大致可分为两种。

第1种途径是作为劳动的薪金支付给国民。

第2种途径是作为资本分红支付给机械设备等资本的所有者。

根据道格拉斯对美国的调查，这一分配比率在大约40年间大体是一定的。

国民生产总值中大约有七成作为劳动的薪金，三成作为给资本所有者的分红。

嗯！如此稳定的分配比率，还真是件怪事。要知道经济形势每时每刻都在变化啊。

所以就很想知道产生如此结果的生产函数$f(L, K)$是怎样的函数？

苦恼的道格拉斯又向数学家查尔斯·柯布提出疑问。

于是，就发现了那个很有名的“柯布-道格拉斯”函数。

柯布-道格拉斯型函数

$$f(L,K)=\beta L^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

那……能请您再稍微详细地给我讲讲有关我工资的事情吗？

那我们就去证明一下吧，之前讲的都可以应用。

首先，设每1个单位的劳动量所对应的薪金为 w，为每1个单位的资本所对应的资本分红为 r。现在，把国家当作一个企业来考虑，如果生产函数是 $f(L,K)$ 的话，利润 Π 就是

$$\Pi = f(L,K) - wL - rK。$$

企业会选择能够使这个利润达到最大的劳动力 L 和资本量 K，由极值条件可知有下式成立，

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = \frac{\partial \Pi}{\partial K} = 0。$$

$$0 = \frac{\partial \Pi}{\partial L} = \frac{\partial f}{\partial L} - \frac{\partial (wL)}{\partial L} - \frac{\partial (rK)}{\partial L} = \frac{\partial f}{\partial L} - w \Leftrightarrow w = \frac{\partial f}{\partial L} \quad \text{——①}$$

$$0 = \frac{\partial \Pi}{\partial K} = \frac{\partial f}{\partial K} - \frac{\partial (wL)}{\partial K} - \frac{\partial (rK)}{\partial K} = \frac{\partial f}{\partial K} - r \Leftrightarrow r = \frac{\partial f}{\partial K} \quad \text{——②}$$

也就是说，

(报酬)=(生产函数关于 L 的偏微分)

(给资本的分红)=(生产函数关于 K 的偏微分)

此外，国民通过劳动所获得的报酬为(薪金)×(劳动量)= wL。它占所生产产品的七成，即

$$wL = 0.7f(L,K) \quad \text{——③}$$

同样地，对于资本所用者所获得的报酬来说，也应该是

$$rK = 0.3f(L,K) \quad \text{——④}$$

由①和③可知，

$$\frac{\partial f}{\partial L} \times L = 0.7f(L,K) \quad \text{——⑤}$$

由②和④可知，

$$\frac{\partial f}{\partial K} \times K = 0.3f(L,K) \quad \text{——⑥}$$



数学家柯布解出了它们成立的$f(L,K)$。柯布所找到的函数就是

$$f(L,K)=\beta L^{0.7}K^{0.3}$$

(β是一个正的参数，它表示技术水平)

是否真的是这样呢？我们来验证一下吧！

$$\frac{\partial f}{\partial L}\times L=\frac{\partial(\beta L^{0.7}K^{0.3})}{\partial L}\times L=0.7\beta L^{(-0.3)}K^{0.3}\times L^{1}$$

$$=0.7\beta L^{0.7}K^{0.3}$$

$$=0.7f(L,K)$$

$$\frac{\partial f}{\partial K}\times K=\frac{\partial(\beta L^{0.7}K^{0.3})}{\partial K}\times K=0.3\beta L^{0.7}K^{(-0.7)}\times K^{1}$$

$$=0.3\beta L^{0.7}K^{0.3}$$

$$=0.3f(L,K)$$









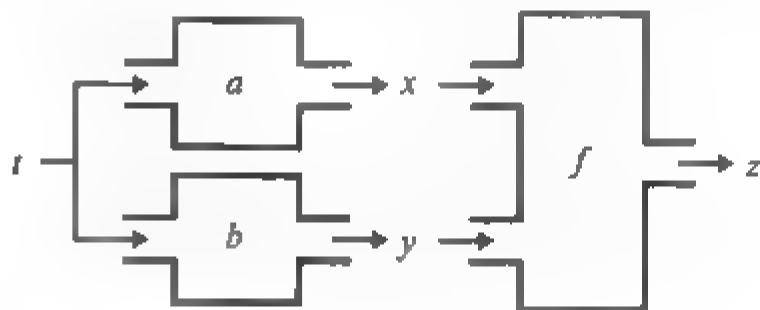
7 对多元复合函数求偏微分的公式——锁链法则[1]

我们之前已经学过一元复合函数(见第 14 页)。

$$y=f(x), z=g(y), z=g(f(x)), (g(f(x)))'=g'(f(x))f'(x)$$



z 是一个关于 x 和 y 的二元函数，记为 $z=(x,y)$，x 和 y 分别是 t 的一元函数，分别用 $x=a(t)$ 、$y=b(t)$ 表示。此时，z 如下图所示，能够表示为只关于 t 的函数。



写成式子的话，就是

$$z=f(x,y)=f(a(t),b(t))$$

此时，$\frac{dz}{dt}$ 会是什么样的呢？

当 $t=t_0$ 时，有 $a(t_0)=x_0, b(t_0)=y_0, f(x_0,y_0)=f(a(t_0),b(t_0))=z_0$，同之前一样，我们只考虑离 t_0, x_0, y_0, z_0 非常近的区域。

$$z-z_0 \underset{\text{近似}}{\sim} a \times (t-t_0) \qquad \text{——①}$$

只要求出上式中的 a，它就是 $\frac{dz}{dt}(t_0)$ 的值。

首先，对函数 $x=a(t)$ 进行微分，得

$$x-x_0 \underset{\text{近似}}{\sim} \frac{da}{dt}(t_0)(t-t_0) \qquad \text{——②}$$

1. 锁链法则：Chain Rule。

同样地，对 $y=b(t)$ 进行微分，得

$$y-y_0 \underset{\text{近似}}{\sim} \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}(t_0)(t-t_0) \qquad \text{——③}$$

接下来，由二元函数 $f(x,y)$ 的全微分公式，可知

$$z-z_0 \underset{\text{近似}}{\sim} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \qquad \text{——④}$$

将②和③代入④，得

$$z-z_0 \underset{\text{近似}}{\sim} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}(t_0)(t-t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}(t_0)(t-t_0)$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}(t_0)\right)(t-t_0) \qquad \text{——⑤}$$

将①和⑤进行比较，得

$$\alpha=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}(t_0),$$

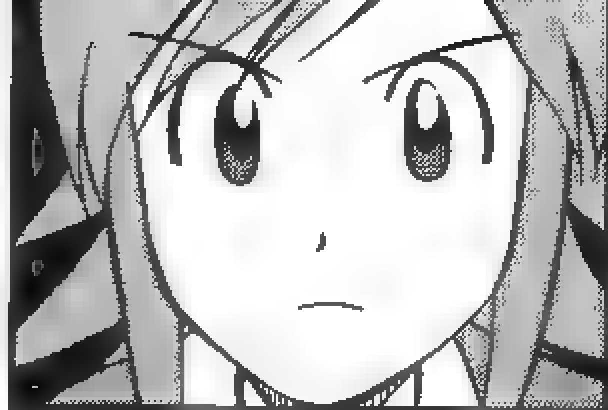
就得到我们想要的了，于是就能够得出接下来的公式。

公式 6-1 | 锁链法则公式(Chain rule)

当 $z=f(x,y)$，$x=a(t)$，$y=b(t)$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}$$

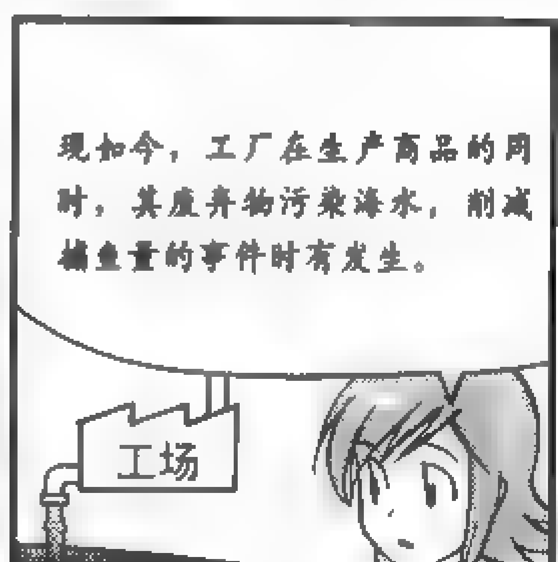


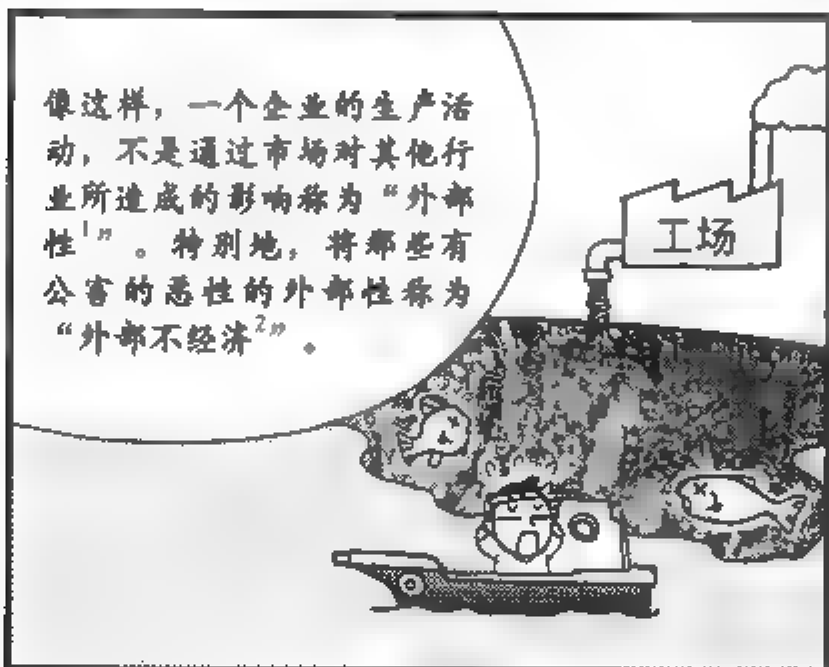














1 外部性：Externality。

2. 外部不经济，External Diseconomics。

将捕鱼量看作是劳动力数量 y 和污染物 b 的二元函数，将其设为 $g(y,b)$ （其中，随着 b 的增加，捕鱼量 $g(y,b)$ 会有所减少，就是说，$\frac{\partial g}{\partial b}$ 是负值)。

$g(y,b)$ 又可以写成 $g(y,b(f(x)))$，它包含变量 x，然而工厂的生产并不是通过市场而对渔业造成的影响。可以看出，这就是外部性。

首先，在工厂和渔业都只考虑其自身利益(利己行为)的情况下，会得出怎样的结论呢？设工厂和渔业的薪金都为 w，工厂商品的价格为 p，鱼的价格为 q。则工厂的利润 $\prod_1$ 就是

$$\prod\nolimits_1(x) = pf(x) - wx \qquad \text{—— ①}$$

因此，工厂是要将这一利润达到最大。极值条件为

$$\frac{d\prod_1}{dx} = pf'(x) - w = 0 \Leftrightarrow pf'(x) = w \qquad \text{— ②}$$

我们将满足这一条件的 x 记为 x^*。也就是

$$pf'(x^*) = w \qquad \text{—— ③}$$

这个 x^* 是工厂所雇用的劳动力的数量，则商品的产量为 $f(x^*)$，废弃物的量为

$$b^* = b(f(x^*))$$

接下来，渔业的利润 $\prod_2$ 为

$$\prod\nolimits_2 = qg(y,b) - wy$$

然而，其中的工厂所排出的废弃物的量已由 $b^* = b(f(x^*))$ 事先决定，所以

$$\prod\nolimits_2 = qg(y,b^*) - wy \qquad \text{—— ④}$$

实际上是一个关于 y 的一元函数。为了使 $\prod_2$ 达到最大，只需对 y 使用一元函数的极值条件即可。

$$\frac{\partial \prod_2}{\partial y} = q\frac{\partial g}{\partial y}(y, b^*) - w = 0 \Leftrightarrow q\frac{\partial g}{\partial y}(y, b^*) = w \qquad \text{—— ⑤}$$

因此，所投入的最佳劳动力数量 y^* 满足下式：

$$q\frac{\partial g}{\partial y}(y^*, b^*) = w \qquad \text{—— ⑥}$$



在这个模型中，工厂和渔业都进行自由经济活动，此时两者的生产量是由满足：

$$pf'(x^*)=w \qquad \text{——③}$$

$$b^*=b(f(x^*)),\ q\frac{\partial g}{\partial y}(y^*,b^*)=w \qquad \text{——⑥}$$

的 x^*、y^* 进一步得出的，工厂所生产的商品的量为 $f(x^*)$，捕鱼量为 $g(y^*,b^*)$。



Π_3 是一个关于 x 和 y 的二元函数，所以它的极值条件为

$$\frac{\partial \Pi_3}{\partial x}=\frac{\partial \Pi_3}{\partial y}=0。$$

第1偏微分为：

$$\frac{\partial \Pi_3}{\partial x}=pf'(x)+q\,\frac{\partial g(y,b(f(x)))}{\partial x}-w$$

$$=pf'(x)+q\,\frac{\partial g}{\partial b}\,(y,b(f(x)))\,b'\,(f(x))f'(x)-w$$

(这里我们使用了锁链法则)

所以，

$$\frac{\partial \Pi_3}{\partial x}=0 \Leftrightarrow \left(p+q\frac{\partial g}{\partial b}\,(y,b(f(x)))\,b'\,(f(x))\right)f'(x)=w \qquad \text{——⑦}$$

同样，有

$$\frac{\partial \Pi_3}{\partial y}=0 \Leftrightarrow q\frac{\partial g}{\partial y}(y, b(f(x)))=w \quad —— ⑧$$

所以，此时的最佳劳动力投入量工厂为 x^{**}，渔业为 y^{**} 的话，就会满足下面的式子：

$$\left(p+q\frac{\partial g}{\partial b}(y^{**}, b(f(x^{**})))\, b'(f(x^{**}))\right) f'(x^{**})=w \quad —— ⑨$$

$$q\frac{\partial g}{\partial y}(y^{**}, b(f(x^{**})))=w \quad —— ⑩$$

虽然形式很复杂，但说到底也不过是联立之后二元方程组的解而已。

同刚刚“利己行为”的方程式③⑥相比，可以看出⑥和⑩相同，但③和⑨是不同的。那么究竟有什么不同呢？

$$p \times f'(x^{*})=w \quad —— ③$$

↓

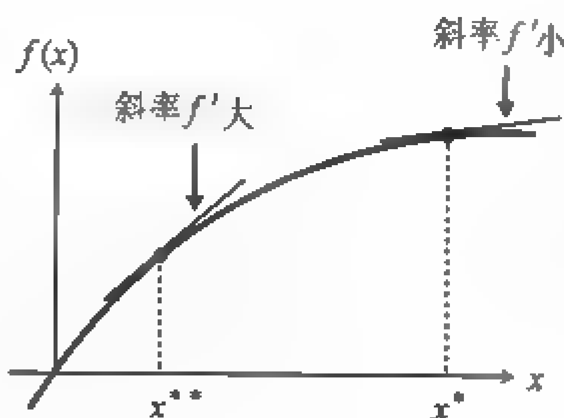
$$(p+♥) \times f'(x^{**})=w \quad —— ⑪$$

其中多出了♥的部分。

由于$\left(♥=q\frac{\partial g}{\partial b}b'(f(x^{**}))\right)$为负值，所以 $p+♥$ 比 p 小

↑为负值

于是，相乘以后同样也是等于 w，如此一来，$f'(x^{**})$ 一定比 $f'(x^{*})$ 大。



上述中的f(x)
通常都是这样的……



为了全社会的利益，工厂劳动力的量应当由只顾自己利益时的x'减少到x''。

本来，在表示利己行为的需求曲线和供给曲线的交点处，社会利益便已达到最大。

但是，如这个例子一样，存在公害等外部不经济时情况就不再是那样了。

请参见105页

但是，有什么好办法能使工厂主动地将生产由x'减少到x''吗？

通过国家命令来使之减少的话，那是计划经济。

除此以外的好办法就是征收税金了。

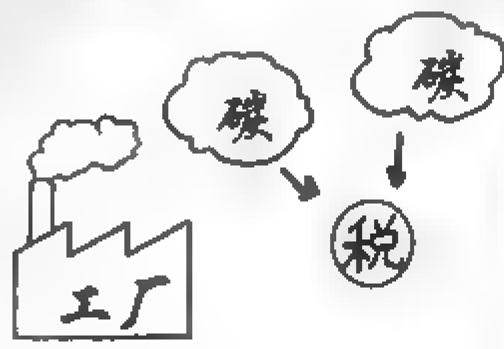
税　金

在工厂生产时，征收一定比例的税金。

我们称其为环境税。



对于全球变暖问题，也有人主张针对二氧化碳的排放征收碳税。



对于目前的情况，对每1单位工厂的商品征收(♥)的税金。

$$\left(-♥=-q\frac{\partial g}{\partial b}b'(f(x^{**}))\right)$$

这是一个正的常数。

于是只顾自己利益时的利润①就变成如下形式。

$$\Pi_1(x)=pf(x)-wx-(-♥f(x)) \quad ⑫$$

将其最大化的极值条件为

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x}=pf'(x)-w+♥f'(x)=0 \Leftrightarrow (p+♥)f'(x)=w \quad ⑬$$

由于⑬和⑨两个方程式相同，所以此时工厂的产量也会使社会利益达到最大。

一般的税(所得税、消费税等)都是为了公共投资。

而环境税是通过征税来管理经济社会，从而保持良好的环境。

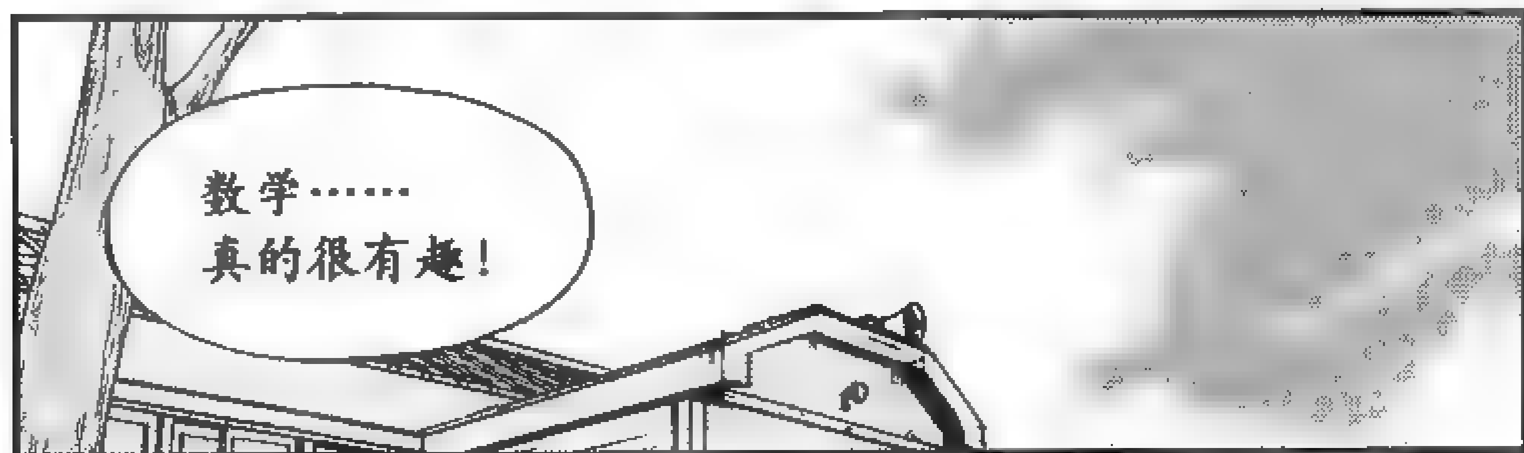
关社长，你理解了吗？





……是
老师！





数学……
真的很有趣！

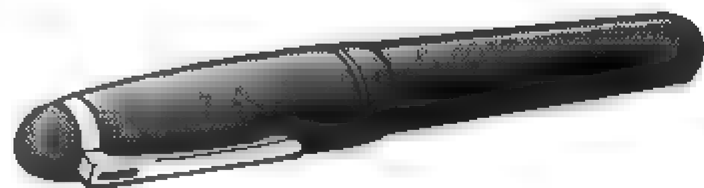
几天后
呼！
这下，要搬的东西
大致都收拾好了。
搬家公司
搬家公司
引间小姐，
这个……
调令
调令……
我也要调动？
不是只有关社
长自己吗？
增井
也有。
事先跟他
说过这事。
实际上，已经决定将
算田镇分社关闭了。

随后就通知了被调往的地方。

想不到会调去冲绳……

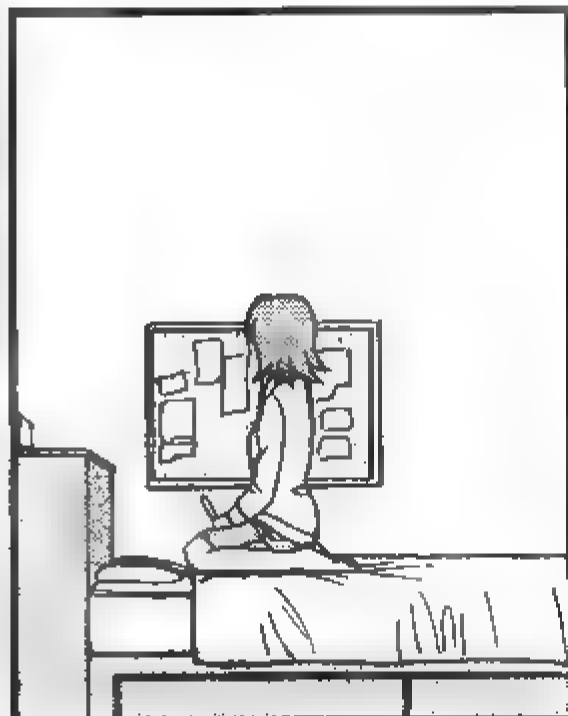
调往冲绳分社……

在我印象中，好像没有冲绳分社，不过……



这个，留作纪念吧！希望你能用它写出优秀的报道。





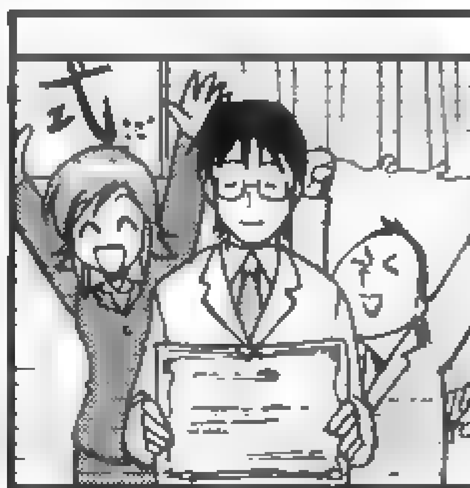
K企业道歉 ○X湾污染问题

向当地渔业协会寻求和解

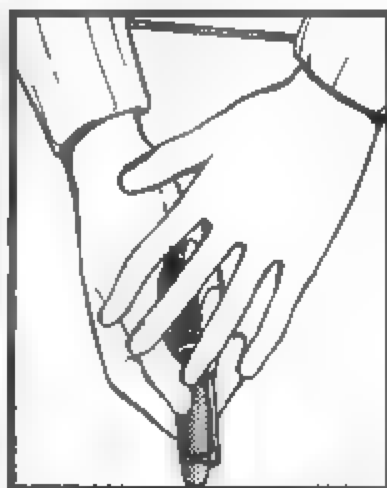
连载 环境与经济











搬家公司

家公司

再见啦……

隐函数的导函数

对于二元函数 $f(x,y)$，所有令函数值为定值 c 的点(x, y)就构成了 $f(x,y)=c$ 的图形。仅取出它的图形的一部分，也就是解出形如 $y=h(x)$ 一元函数时，我们将其称为“隐函数”。隐函数 $y=h(x)$，其定义域内的全体 x 都满足 $f(x,h(x))=c$。此时，我们来试求一下 $h(x)$的导函数。

设 $z=f(x,y)$，由全微分公式可知，$dz=f_x dx+f_y dy$。就算点(x, y)在 $f(x,y)=c$ 的图像上移动的话，函数 $f(x,y)$ 的值也不会发生变化，z 的增量始终为 0，即 $dz=0$。由全微分公式可知，$0=f_x dx+f_y dy$，假设 $f_y\neq 0$，则可以将其变形为 $\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x}{f_y}$。式子的左边是，图像上的点的 y 增量除以 x 增量的理想状态下的式子，它恰好表示的是微分系数。因此，有

$$h'(x)=-\frac{f_x}{f_y}$$

例 对于 $f(x,y)=x^2+y^2$ 来说，$f(x,y)=r^2$ 就是以原点为中心、半径为 r 的圆。此时，在满足 $x^2\neq r^2$ 的点(x, y)附近，就能够解出 $f(x,y)=x^2+y^2=r^2$ 的隐函数是 $y=h(x)=\sqrt{r^2-x^2}$，或者 $y=h(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$。此时，它的导函数由公式便可得到。

$$h'(x)=-\frac{f_x}{f_y}=-\frac{x}{y}$$

第6章 本章习题

1. 已知 $f(x,y)=x^2+2xy+3y^2$，求 f_x和f_y。

2. 在重力加速度为 g 的情况下，长度为 L 的钟摆的周期 T 为：$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

(已知：重力加速度 g 随着距离地面高度的变化而变化)

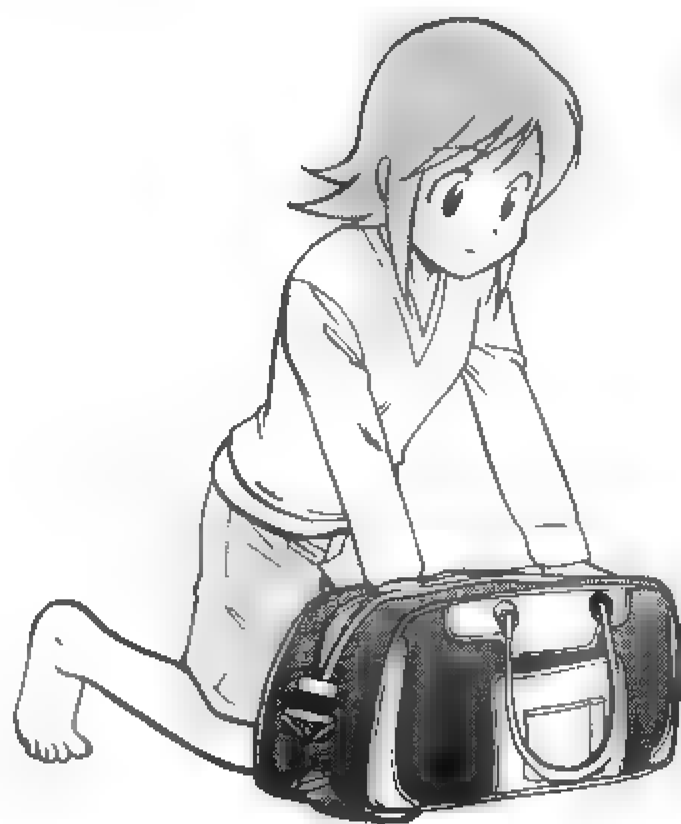
(1) 写出 T 的全微分式。

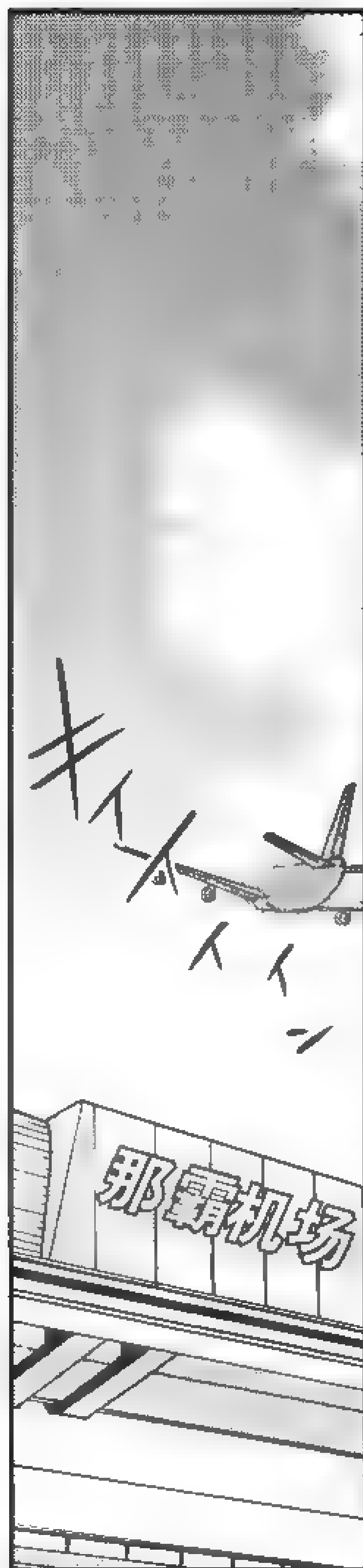
(2) 若 L 加长百分之一，g 减小百分之二，那么 T 将会增大百分之几？

3. 使用锁链法则试求出 $f(x,y)=c$ 的隐函数 $h(x)$的微分公式。

尾　声

为什么会有数学




那霸机场

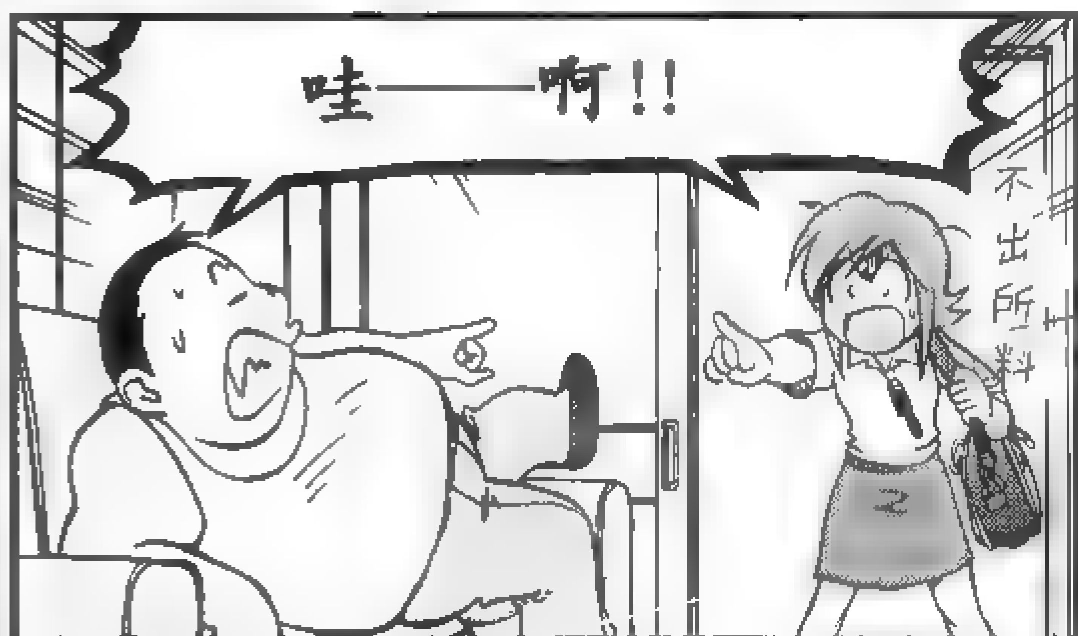

哇！
那边
就是了！


嗯！
无论来到哪里
都要努力！


可是……
晨访报社
冲绳分社
在哪里呢……


ド——ン
冲绳分社
晨访报社
荒凉


为什么有种似曾
相识的感觉!!


哇——啊!!
不出所料


难道说增井
先生是冲绳
分社社长?
难道……
我也是刚刚才从
机场到这里来的。
原来……
是这样啊!


……
刚刚来
就在这里
睡着了!!!


分社社长?……

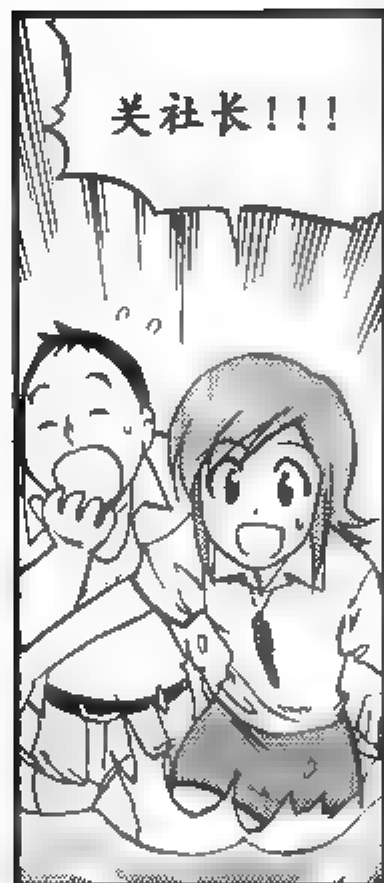








你们俩都来啦！


关社长！！！

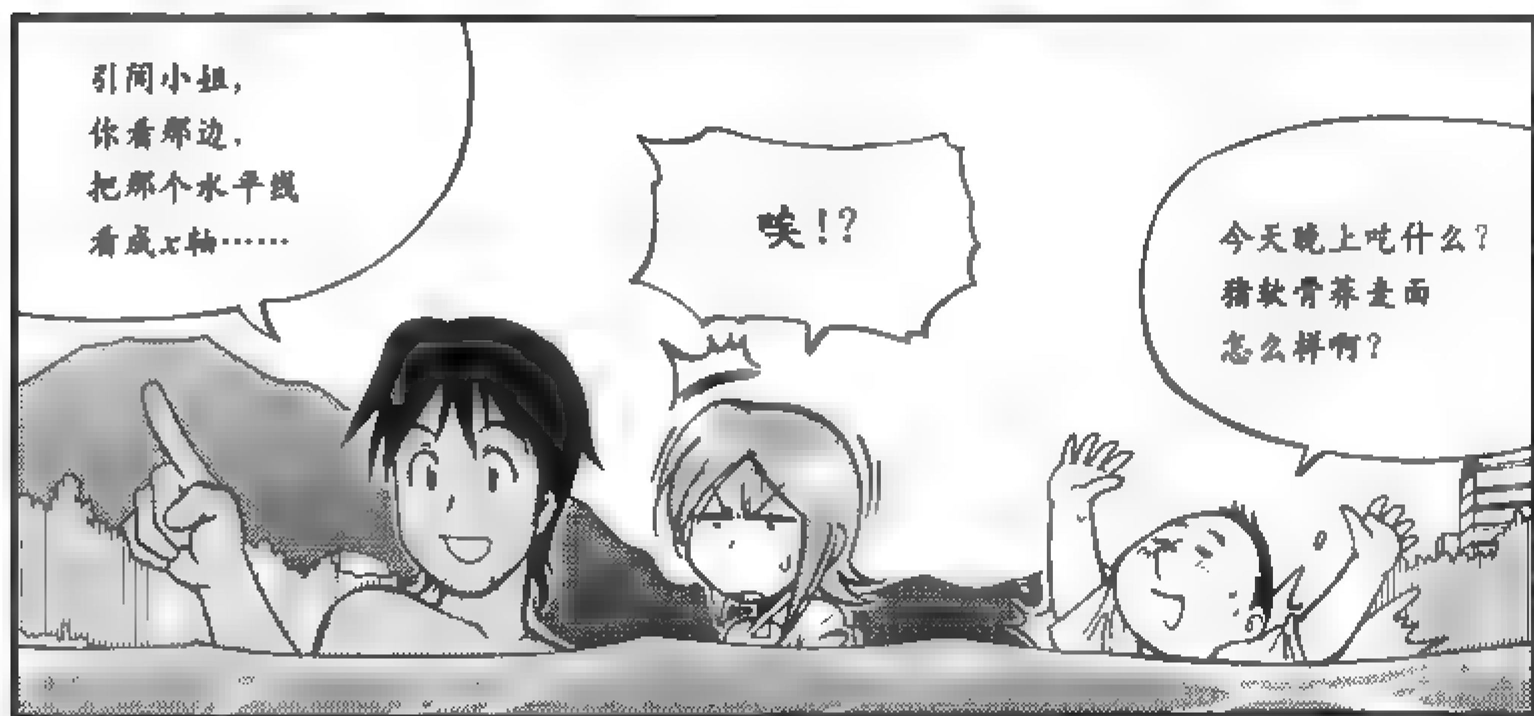

关——社长！！


来吧！！
我要吃遍冲绳！！
还是想在温暖的地方多待一年，让我再慢慢地考虑一些事情。


关社长，
您……知道
为什么会有
数学吗？


为什么会有？


就是为了传达一些无法
用语言表达的事情……


今天晚上吃什么？
猪软骨荞麦面
怎么样啊？
唉！？
引间小姐，
你看那边，
把那个水平线
看成x轴……


热闹
明天
也是个晴天！

〈全书完〉

附 录

附录A 练习问题的答案及讲解

序言

1. 将 $y=\frac{5}{9}(x-32)$ 代入 $z=7y-30$，得 $z=\frac{35}{9}(x-32)-30$

第1章

1. (1) $f(5)=g(5)=50$　　(2) $f'(5)=8$

2. $$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{(a+\varepsilon)^3-a^3}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{3a^2\varepsilon+3a^2\varepsilon+\varepsilon^3}{\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}(3a^2+3a\varepsilon+\varepsilon^2)=3a^2$$

因此，$f'(x)$ 的导函数为，$f'(x)=3x^2$

第2章

1. $f'(x)=-\frac{(x^n)'}{(x^n)^2}=-\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}}=\frac{n}{x^{n+1}}$

2. $f'(x)=3x^2-12=3(x-2)(x+2)$

若 $x<-2$ 则 $f'(x)>0$，若 $-2<x<2$，则 $f'(x)<0$；若 $x>2$，

则 $f'(x)>0$。所以，$x=-2$ 时取极大值；$f(-2)=16$，$x=2$ 时取极小值 $f(2)=16$

3. (1) 将 $f(x)=(1-x)^3$ 看作是由 $g(x)=x^2$ 和 $h(x)=1-x$ 复合而成的 $g(h(x))$，所以

$$f'(x)=g'(h(x))h'(x)=3(1-x)^2(-1)=-3(1-x)^2$$

(2) 对 $g(x)=x^2(1-x)^3$ 进行微分 $g'(x)=(x^2)'(1-x)^3+x^2((1-x)^3)'$

$$=2x(1-x)^3+x^2(-3(1-x)^2)=x(1-x)^2(2(1-x)-3x)$$

$$=x(1-x)^2(2-5x)$$

因此，在 $x=\frac{2}{5}$ 处取最大值 $f\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{108}{3125}$

第3章

1. (1) $\int_1^3 3x^2\mathrm{d}x=3^3-1^3=26$

(2) $\int_2^4 \frac{x^3+1}{x^2}\mathrm{d}x = \int_2^4 x + \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \int_2^4 x\mathrm{d}x + \int_2^4 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}(4^2-2^2) \quad \left(\frac{1}{4} \quad \frac{2}{4}\right) = \frac{25}{4}$$

(3) $\int_0^5 x+(1+x^2)^7\mathrm{d}x + \int_0^5 x-(1+x^2)^7\mathrm{d}x = \int_0^5 2x\mathrm{d}x = 5^2-0^2 = 25$

2. (1) $y=f(x)=x^2 \quad 3x$ 的图像和 x 轴所围成的面积 $= \int_0^3 x^2-3x\mathrm{d}x$

(2) $-\int_0^3 x^2-3x\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}(3^3-0^3)+\frac{3}{2}(3^2-0^2) = \frac{9}{2}$

第4章

1. (1) $(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

(2)由于$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1$$

2. 根据$f'(x) = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$，可得

最小值为$f(-1) = -\frac{1}{e}$

3. 设$f(x)=x^2$，$g(x)=\ln x$，再进行分部积分。

$\int_1^e (x^2)'\ln x\mathrm{d}x + \int_1^e x^2(\ln x)'\mathrm{d}x = e^2\ln e - \ln 1$

因此$\int_1^e 2x\ln x\mathrm{d}x + \int_1^e x^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x = e^2$

$\int_1^e 2x\ln x\mathrm{d}x = -\int_1^e x\mathrm{d}x + e^2 = -\frac{1}{2}(e^2-1)+e^2 = \frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}$

第5章

1. 对于$f(x)=e^{-x}$，有$f'(x)=-e^{-x}$，$f^{(2)}(x)=e^{-x}$，

$f^{(3)}(x)=-e^{-x}$，…因此

$$f(x)=1-x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\cdots$$

2. 对$f(x)=(\cos x)^{-1}$进行微分 $f'(x)=(\cos x)^{-2}\sin x$，

$$f^{(2)}(x)=2(\cos x)^{-3}(\sin x)^2+(\cos x)^{-2}\cos x$$

$$=2(\cos x)^{-3}(\sin x)^2+(\cos x)^{-1}$$

即$f(0)=1$，$f'(0)=0$，$f^{(2)}(0)=1$，

因此，二次近似函数为$f(x)=1+\frac{1}{2}x^2$

3. 完全按照漫画中的过程去做就可以了。就是说，依次微分后再代入$x=a$就可以了。

第6章

1. 对于$f(x,y)=x^2+2xy+3y^2$来说，有$f_x=2x+2y$和$f_y=2x+6y$

2. $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}=2\pi g^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$的全微分式为

$$dT=\frac{\partial T}{\partial g}dg+\frac{\partial T}{\partial L}dL=-\pi g^{-\frac{3}{2}}L^{\frac{1}{2}}dg+\pi g^{-\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}dL$$

因此，$\Delta T\sim-\pi g^{-\frac{3}{2}}L^{\frac{1}{2}}\Delta g+\pi g^{-\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}\Delta L$

此处，我们代入$\Delta g=-0.02g$、$\Delta L=0.01L$

$$\Delta T\sim0.02\pi g^{-\frac{3}{2}}L^{\frac{1}{2}}g+0.01\pi g^{-\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}L=0.03\pi g^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}=0.03\frac{T}{2}=0.015T$$

3. $f(x,y)=c$的隐函数是$y=h(x)$，在x附近有$f(x,h(x))=c$

所以，在这个范围内左边为常数函数，由此可知

$\frac{df}{dx}=0$ 根据锁链法则，得$\frac{df}{dx}=f_x+f_yh'(x)=0$

所以$h'(x)=-\frac{f_x}{f_y}$

附录B 本书中所涉及的主要公式、定理及函数

■ 一次方程式（一次函数）

经过点(a,b)，且斜率为m的直线的方程式

$y=m(x-a)+b$

■ 微分

◇ 微分系数

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

◇ 导函数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

其他的导函数符号

$$\frac{dy}{dx},\frac{df}{dx},\frac{d}{dx}f(x)$$

◇ 常数倍

$$\{\alpha f(x)\}'=\alpha f'(x)$$

◇ 幂函数的导函数

$$\{x^n\}'=nx^{n-1}$$

◇ 和的微分

$$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$$

◇ 积的微分

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

◇ 商的微分

$$\left\{\frac{g(x)}{f(x)}\right\}'=\frac{g'(x)f'(x)-g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$$

◇ 复合函数

$$\{g(f(x))\}'=g'(f(x))f'(x)$$

◇ 反函数的微分

当$y=f(x),x=g(y)$时

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

◇ 极　值

若$y=f(x)$在$x=a$处取极大值或极小值，则$f'(a)=0$

若$f'(a)>0$　则在$x=a$附近　$y=f(x)$呈递增趋势

若$f'(a)<0$　则在$x=a$附近　$y=f(x)$呈递减趋势

◇ 平均值定理

对于$a,b(a<b)$，存在ξ满足$a<\xi<b$，则

$f(b)=f'(\zeta)(b-a)+f(a)$

常用函数的微分

◇ 三角函数

$\{\cos\theta\}' = -\sin\theta, \{\sin\theta\}' = -\cos\theta$

◇ 指数函数

$\{e^x\}' = e^x$

◇ 对数函数

$\{\ln x\}' = \dfrac{1}{x}$

积　分

◇ 定积分

当 $F'(x) = f(x)$ 时

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

◇ 定积分区间的接续

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$$

◇ 定积分的和

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\}\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

◇ 定积分的常数倍

$$\int_a^b \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

◇ 换元积分

当 $x = g(y), b = g(\beta), a = g(\alpha)$ 时

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f'(g(y))g'(y)\mathrm{d}y$$

◇ 分部积分

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

泰勒展开

当$f(x)$在$x=a$附近进行泰勒展开时

$$f(x)=f(a)+\frac{1}{1!}f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^{(n)}+\cdots$$

◇ 几种常用函数的泰勒展开

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots$$

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n+\cdots$$

偏微分

◇ 偏微分

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$$

◇ 全微分

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

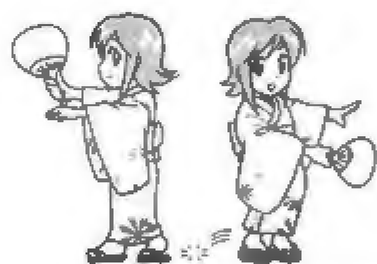
◇ 锁链法则(Chain rule)

当$z=f(x,y)$，$x=a(t)$，$y=b(t)$时，

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{da}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{db}{dt}$$

微积分合唱曲——三角函数版——

难以了解的道理也能用
合唱稍微理解微积分~



sin・cos在圆圈
中微积分~



sin的微分
是cos~



cos的积分
是sin~



sin・cos在圆圈
中用微积分互换~



（O-3662.0104）
责任编辑：王　炜　赵丽艳
责任制作：董立颖　魏　谨
封面制作：

用漫画这种形式讲数学、物理和统计学，十分有利于在广大青少年中普及科学知识。

周恩来、邓颖超秘书，周恩来邓颖超纪念馆顾问
中日友好协会理事，《数理天地》顾问，全国政协原副秘书长

用漫画和说故事的形式讲数学，使面貌冷峻的数学变得亲切、生动、有趣，使学习数学变得容易，这对于提高全民的数学水平无疑是功德无量的事。

《数理天地》杂志社　社长　总编
"希望杯"全国数学邀请赛组委会　命题委员会主任　周国镇

用漫画的形式，讲解日常生活中的数学、物理知识，更能让大家感受到数学殿堂的奥妙与乐趣。

《光明日报》原副总编辑
中华炎黄文化研究会　常务副会长

科学漫画是帮助学习文科的人们用形象思维的方式掌握自然科学的金钥匙。

中国人民大学外语学院日语专业　主任
大学日语教学研究会　会长　成同社

在日本留学的时候，我在电车上几乎每次都能看到很多年轻的白领看这套图书，经济实惠、图文并茂、浅显易懂，相信这套图书的中文版也一定会成为白领们的手中爱物。

大连理工大学　能源与动力学院　博士　副教授

我非常希望能够在书店里看到这样的书：有人物形象、有卡通图、有故事情节，当然最重要的还有深厚的理工科底蕴。我想这样的书一定可以大大提升孩子们的学习兴趣，降低他们对于高深的理工科知识的恐惧感。

北京启明星培训学校　校长

书中的数学知识浅显实用，漫画故事的形式使知识贴近生活，概念更容易理解。

北京大学　数学科学学院　博士　张磊

上架建议：科普/漫画
ISBN 978-7-03-025321-7



科学出版社　东方科龙
http://www.okbook.com.cn
zhaoliyan@mail.sciencep.com

定价：29.80元